大学への
数学B
ニューアプローチ

東京大学名誉教授・東海大学教授
藤 田 宏
放送大学教授
長岡亮介
千葉工業大学教授
長崎憲一
共著

研文書院

New Approach

大学への
数学B
ニューアプローチ

東京大学名誉教授・東海大学教授
藤田　宏
放送大学教授
長岡亮介
千葉工業大学教授
長崎憲一
共著

研文書院

New Approach

はしがき

本書が属しているシリーズ“大学への数学ニューアプローチ”は，姉妹編，数学I，数学Aのはしがきで述べたように，ふたつのキーワードのそれぞれに象徴される次のねらいをもっている．

その第一は，数学に関するかぎり**大学受験での成功**に自信が持てる学力を，将来の発展につながる**正統的な勉強**により身につけようとする諸君のお役に立つことである．

第二は，そのような**高い水準**に到達するための読者の**負担が最小化**されるように，すなわち，読者の努力が効率よく活き，才能が引き出されるように題材および表現の工夫をこらしてのニューアプローチ（新しい近づき方）を提供することである．

一流の大学—そこでは現代数学の研究者である教授達が数学の出題を行なう—の入試に関しては，高校数学の範囲であっても，浅薄な「技」や「術」を頼るべきではなく，やはり，正統的な理論を理解し，筋目のただしい問題解決力を身につけることが成功への王道である，また，こうした勉強が，理系のみならず文系の諸専門に進む場合にも，これからの社会で尊重される数学的な知性の育成につながるはずである．

“東大への解析I，解析II”として誕生した，大学への数学シリーズはすでに40年余の歴史を持っている．幸いに，大学へのシリーズにこめた，”正統的な勉学による実力の育成を”との我々の主張は、進学校の真剣な先生方の評価，および，気力と志に富んだ高校･受験生の支持を一貫して受け続けたのであった．”この伝統的な長所は今回のシリーズでも確保したつもりである．

一方，センター試験が高校生の心配事として先行する現実のもとでは，理論体系に忠実なあまり，あるいは性急な完全主義により，難行苦行を若い諸君に強いることは酷であり，実際的ではない．また，数学の優れた資質を備えた生徒のなかにも，大要を先

に理解して後に知識の掘り下げに務めるのが大成の道であるタイプが少なくない．ニューアプローチから入ることをすすめたい場合である．

紙面づくりに関しても，視覚的な情報摂取への傾斜が著しい今日，現代風な体裁になれた読者がなじみやすいようにとの配慮から，“ニューアプローチ”では，A篇の簡素化，活字の改善、視覚的な印象の重視，発展的材料の巻末章への分離などを行なっている．しかし，最重要部分である問題篇のB篇では，従来のスタイルと性格を維持しつつ最近の動向をにらんでの更新に努めた．

さて，本書の内容は，数学Bの単元，すなわち，ベクトルという概念を利用した平面図形，空間図形に対する解析的なアプローチの基本，複素数の導入による二次方程式の理論の完成と高次方程式への発展，複素数の幾何学的解決，そして数学Ⅰで学んだ確率の発展部分である．これらの単元を学習する意義と目標については，それぞれの単元の導入文を見ていただくとして，ここでは，これらが，いずれも，高校生諸君にとって，高校数学の良さ，面白さを感ずることのできる最も魅力的な単元であることを強調しておこう．

最後に，表だっては本書の著者陣に名を連ねてはいないが，本書の完成に対して，学識とセンスに基づいて大きな寄与をされた渡辺浩博士，若手の才気と活力を活かして貴重な寄与をして下さった乙藤隆史さん（東京工大），元木稔さん（海城学園高校）に感謝したい．また，この機会に，日本の社会の命運に関わる数学教育の重要性を認識し，正統な数学の学習を支援する参考書の刊行という難事を遂行している，研文書院とその代表者飯塚信之氏に敬意を表すものである．

1996年　新春

藤田宏　長岡亮介　長崎憲一

本書の特色

本書は，極めて個性の強い参考書であるが，その個性を短くまとめるなら，

基礎理論の解説・基本概念の説明に際しては，大学の立場に立って見てもおかしくない，きちんとしたものを与え

問題演習篇においては，真に取り組む価値のある良問を理論的・教育的配慮に基づいて体系的に精選・新作し，また〈なぜそのように解くか〉が伝わるような解答・解説をつけた

ということである．さらに，検定教科書の平板な叙述に飽きたらない読者のために，

上級の理論を視野に入れた発展的解説をもりこんだ

のも，他書にない特徴であろう．

本書の利用法

1° A基礎篇で知識を整理した後に，B篇の演習問題を解くのが普通の学習の順序であろうが，必ずしもこれにこだわる必要はない．現在の力に応じて，解けそうなB篇の問題から手をつけるのも良い方法である．

2° B演習問題の学習の理想的な形は，まず独力で問題に向かい，その結果を本書の解答と比較することである．しかし，読者の現在の実力によっては，まず，本書の解を熟読し，解法を支える基本的な考え方をしっかり理解するというのも，考えられる使い方の1つであろう．実際，本書で扱われる問題とそれに対するアプローチの考え方が理解できるだけで，大概の大学入試問題は，独力で解けるようになるはずである．

▨内容一覧▨　A 基礎理論篇

▨ 内 容 一 覧 ▨　B 演習問題篇 (127 題)

§1 ベクトル (59 題)

§2 複 素 数 (30 題)

§3 確率分布 （24 題）

§4 算法とコンピュータ

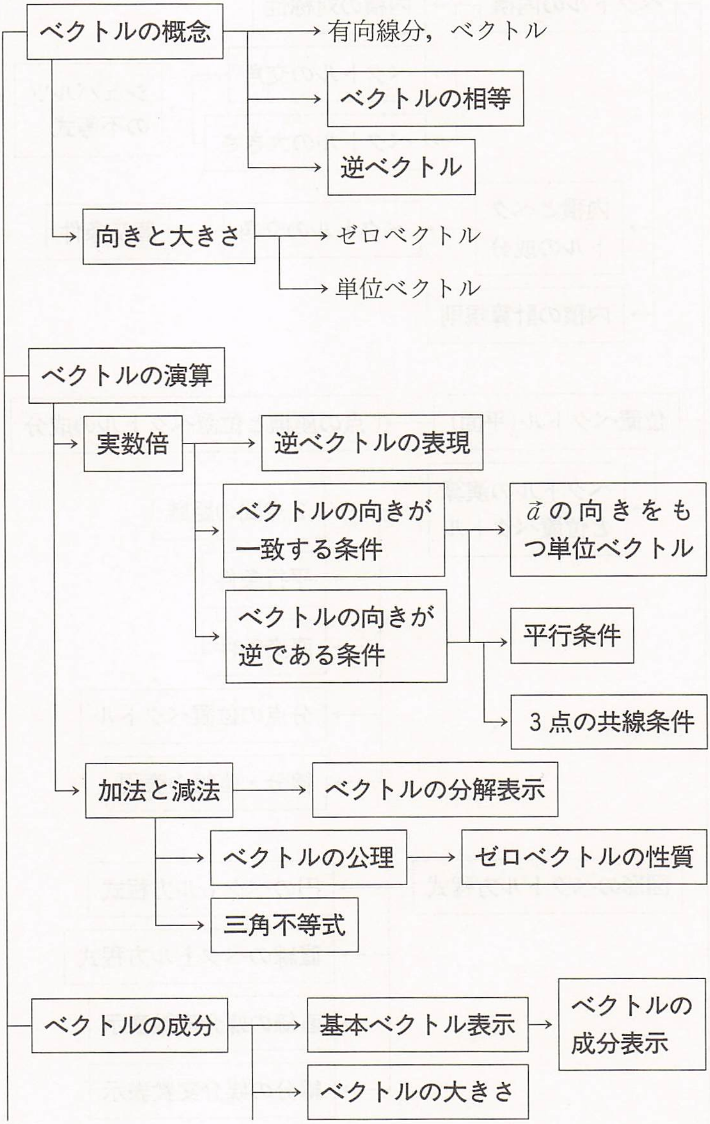
（本セクションは，B 篇をもたない.）

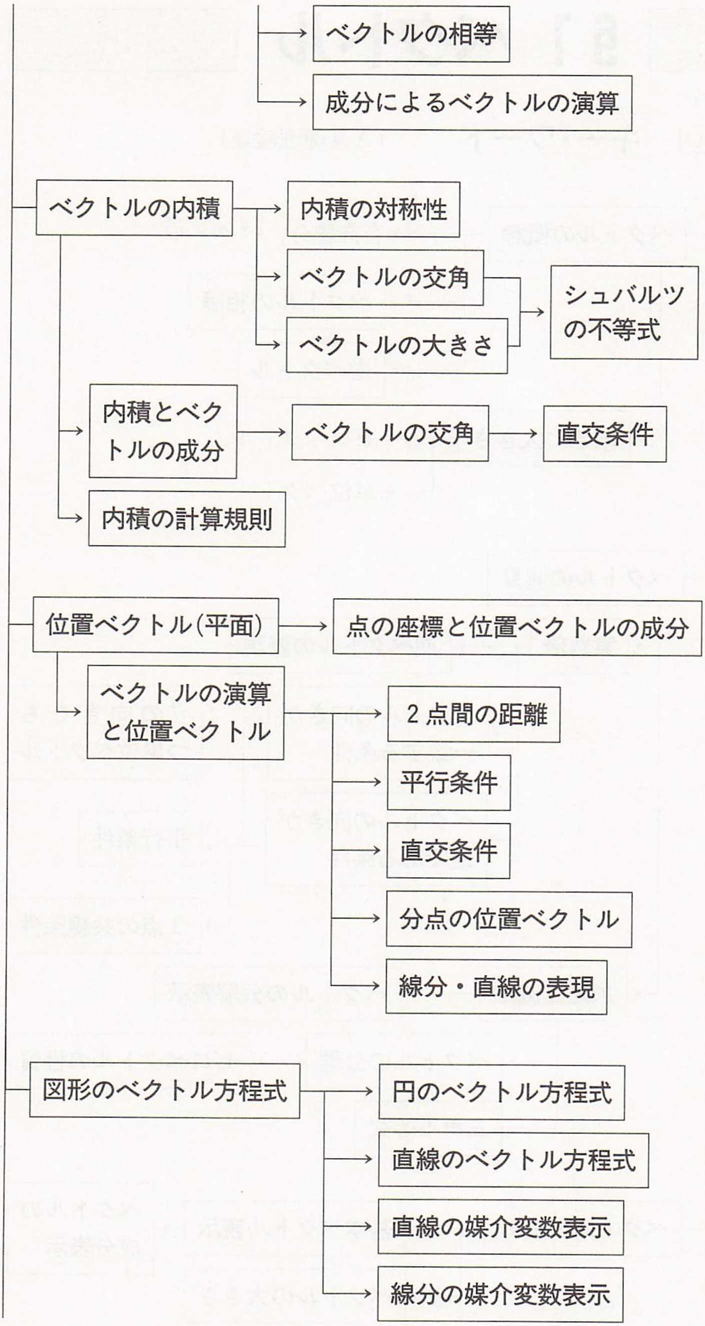
§5 発展問題 （14 題）

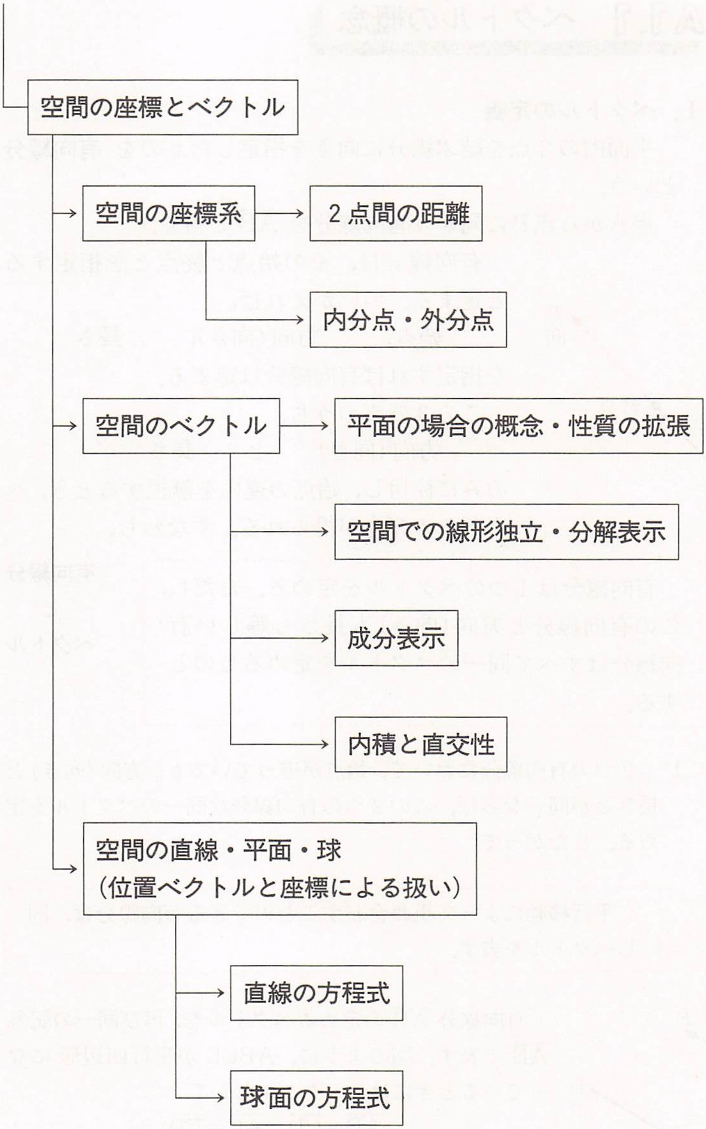
▨ 内 容 一 覧 ▨　C 探 究 篇

§1 ベクトル

□ キー・ワード　（A基礎理論篇）




ベクトルの相等
成分によるベクトルの演算
ベクトルの内積
内積の対称性
ベクトルの交角
ベクトルの大きさ
シュバルツの不等式
内積とベクトルの成分
ベクトルの交角
直交条件
内積の計算規則
位置ベクトル(平面)
点の座標と位置ベクトルの成分
ベクトルの演算と位置ベクトル
2点間の距離
平行条件
直交条件
分点の位置ベクトル
線分・直線の表現
図形のベクトル方程式
円のベクトル方程式
直線のベクトル方程式
直線の媒介変数表示
線分の媒介変数表示

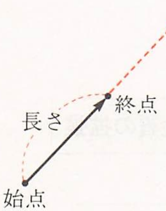

空間の座標とベクトル
空間の座標系
2 点間の距離
内分点・外分点
空間のベクトル
平面の場合の概念・性質の拡張
空間での線形独立・分解表示
成分表示
内積と直交性
空間の直線・平面・球
(位置ベクトルと座標による扱い)
直線の方程式
球面の方程式

A1.1　ベクトルの概念

I．ベクトルの定義

平面内の2点を結ぶ線分に向きを指定したものを **有向線分** という．

点Aから点Bに向かう有向線分を $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と書く．



有向線分は，その始点と終点とを指定すると定まる．いいかえれば，

始点，　方向（向き），　長さ

を指定すれば有向線分は定まる．

この3要素のうち，

方向（向き）　と　長さ

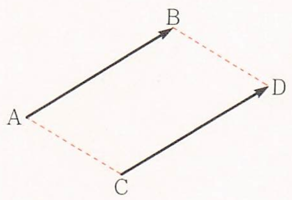
のみに注目し，始点の違いを無視するとき，ベクトルの概念が得られる．すなわち，

有向線分と ベクトル

> 有向線分は1つのベクトルを定める．ただし，この有向線分と方向（向き）も長さも等しい有向線分はすべて同一のベクトルを定めるものとする．

1°　2つの有向線分において，始点が違っていても，方向（向き）と長さとが同一ならば，この2つの有向線分は同一のベクトルを定める．したがって

> 平行移動によって重ね合わすことのできる有向線分は，同じベクトルを表す．



有向線分 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ の定めるベクトルを，再び同一の記号 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ で表す．図のように，ABCD が平行四辺形になっているときには，ベクトルとして

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{CD}},\quad \overrightarrow{\mathrm{AC}}=\overrightarrow{\mathrm{BD}}$$

である．

2°　有向線分 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ の表すベクトルを $\vec{a}$ とおくときには

$$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}$$

のように書く．また，

ベクトルの相等

$\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{b}=\overrightarrow{CD}$ とするとき,

$\vec{a}=\vec{b}$ $\Longleftrightarrow$ 有向線分 $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{CD}$ が平行移動によって重ね合わせ得る.

$\Longleftrightarrow$ $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{CD}$ の向きも長さも一致する.

3°　ベクトルを文字で表すのに

$\vec{a}$, $\vec{b}$, …………, $\vec{x}$, $\vec{y}$ などの矢印付きの文字

あるいは,

$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, …………, $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ などの太文字

を用いる.

高校レベルでは前者の方が普及している.

4°　与えられたベクトル $\vec{a}$ の向きを逆にしたベクトルを $\vec{a}$ の **逆ベクトル** といい, $-\vec{a}$ とかく.

すなわちベクトル $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ の逆ベクトルは $-\vec{a}=\overrightarrow{BA}$ である.



II. ベクトルの向きと大きさ

ベクトル $\vec{a}$ を表す有向線分が有向線分 $\overrightarrow{AB}$ であるとき,

$$\begin{cases} \text{ベクトル}\ \vec{a}\ \text{の向き} = \text{有向線分}\ \overrightarrow{AB}\ \text{の向き} \\ \text{ベクトル}\ \vec{a}\ \text{の大きさ} = \text{有向線分}\ \overrightarrow{AB}\ \text{の長さ} = \overline{AB} \end{cases}$$

と定める. また

ベクトル $\vec{a}$ の大きさ$=|\vec{a}|$

という記号で表す.

ベクトルの向きと大きさ

1°　ベクトル $\vec{a}$ の **大きさ** のことを $\vec{a}$ の **長さ** ということもある.

III. ゼロベクトル

始点と終点とが一致した有向線分 $\overrightarrow{\mathrm{AA}}$ の定めるベクトルは大きさが0のベクトルである．これをゼロベクトルといい，

$$\vec{0} \quad \text{または} \quad \mathbf{0}$$

で表す．すなわち，

$$\vec{0}=\overrightarrow{\mathrm{AA}}$$

ゼロベクトル

1°　$|\vec{0}|=0$ である．また，$|\vec{a}|=0$ なら $\vec{a}=\vec{0}$ である．

すなわち，

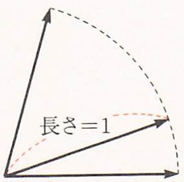
$$\vec{a}=\vec{0} \iff |\vec{a}|=0$$

2°　ゼロベクトル $\vec{0}$ の方向は定められない．

IV. 単位ベクトル

大きさが1のベクトルを単位ベクトルという．

単位ベクトル



1°　$\vec{a}$が単位ベクトル $\iff |\vec{a}|=1$

したがって，いろいろな方向の単位ベクトルがある．

ただし，向きを指定すれば，単位ベクトルは一通りにきまる．

注意　**平面のベクトルと空間のベクトル**

この章でのように，ベクトルを考えるに当って，それらを定める有向線分がすべて同一平面上にあるものに限るときは **平面のベクトル** を考えていることになる．これに対して，空間内の有向線分の定めるベクトルを **空間ベクトル** というが，これについては A1.7 以降で学ぶ．

A1.2 ベクトルの実数倍

I．ベクトルと実数との積

ベクトルの実数倍

[定義]　k を実数，$\vec{a}$ をベクトルとするとき，その積 $k\vec{a}$ を次のように定める．

(1)　$\vec{a}$ が $\vec{0}$ でないとき，

i）　$k>0$ ならば，$k\vec{a}$ は $\vec{a}$ と同じ向きで，大きさが $k|\vec{a}|$ に等しいベクトルである．

ii）　$k=0$ ならば，$k\vec{a}=0\vec{a}=\vec{0}$

iii）　$k<0$ ならば，$k\vec{a}$ は $\vec{a}$ と反対向きで，大きさが $|k||\vec{a}|$ に等しいベクトルである．

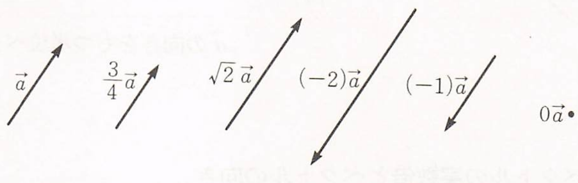
(2)　$\vec{a}$ が $\vec{0}$ のとき，k が何であっても

$$k\vec{a}=k\vec{0}=\vec{0}$$

1°　ベクトル $k\vec{a}$ のことを，ベクトル $\vec{a}$ の k 倍ともいう．$k\vec{a}$ のことを $k\cdot\vec{a}$ と書くこともある．

一方，$\vec{a}k$ といった書き方はしない．

2°　例



3°　$(-1)\vec{a}$ を上の定義に従って考えると，$\vec{a}$ の逆ベクトル $-\vec{a}$ と一致する．すなわち，

$$(-1)\vec{a}=-\vec{a}$$

なお，次の等式も明らかである．

$$1\vec{a}=\vec{a}$$

4°　ベクトルの実数倍の大きさについては，次の公式が成立する．

任意の実数 k，任意のベクトル $\vec{a}$ に対して

$$|k\vec{a}|=|k||\vec{a}|$$

ここで $|k\vec{a}|$，$|\vec{a}|$ はベクトル $k\vec{a}$，$\vec{a}$ の大きさを表し，$|k|$ は実数 k の絶対値を表す．

5°　α, β を任意の実数とし，$\vec{a}$ を任意のベクトルとする．このとき，

ベクトル $\vec{a}$ の $\alpha\beta$ 倍である $(\alpha\beta)\vec{a}$,

ベクトル $\alpha\vec{a}$ の β 倍である $\beta(\alpha\vec{a})$,

ベクトル $\beta\vec{a}$ の α 倍である $\alpha(\beta\vec{a})$,

の3つのベクトルはすべて等しい．

すなわち

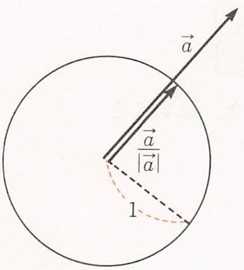
$$\beta(\alpha\vec{a})=\alpha(\beta\vec{a})=(\alpha\beta)\vec{a}$$

6°　k が0でない実数とするとき，実数 k によるベクトルの“割り算”を次のように定義する．$\vec{a}$ がベクトルのとき

$$\frac{\vec{a}}{k}=\left(\frac{1}{k}\right)\vec{a}.$$

このように約束すると，たとえば

$$\left(\frac{3}{4}\right)\vec{a}=\frac{3\vec{a}}{4}=3\left(\frac{\vec{a}}{4}\right)$$



7°　“割り算”は，次のような使い方において実践的である．

> $\vec{a}\neq\vec{0}$ のとき
>
> $$\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=(\vec{a}\text{ の向きをもつ単位ベクトル})$$

$\vec{a}$ の向きをもつ単位ベクトル

II．ベクトルの実数倍とベクトルの向き

正の定数 k に対して $\vec{a}$ と $k\vec{a}$ とは向きが等しい．逆に $\vec{a}$ と向きが等しいベクトルはこのように表される．

すなわち

> $\vec{a}$, $\vec{b}$ が0ベクトルでないとき，
>
> $\vec{a}$, $\vec{b}$ の **向きが一致** する $\iff$ $\vec{b}=k\vec{a}$ となる **正数** k が存在する．
>
> $\iff$ $\vec{a}=l\vec{b}$ となる **正数** l が存在する．

ベクトルの向きが一致する条件

次に，$\vec{a}$，$\vec{b}$ が $\vec{0}$ でないとき，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の向きがちょうど逆になっているための条件は，一方が他方の負の実数倍になっていることである．

すなわち，

> $\vec{a}$，$\vec{b}$ が $\vec{0}$ でないとき，
> $\vec{a}$，$\vec{b}$ の **向きが逆** である　$\Longleftrightarrow$　$\vec{b}=k\vec{a}$ となる **負数** k が存在する．
> 　　　　　　　　　　　　　　$\Longleftrightarrow$　$\vec{a}=l\vec{b}$ となる **負数** l が存在する．

ベクトルの向きが逆向きであるための条件

さらに，$\vec{0}$ でない2つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ について

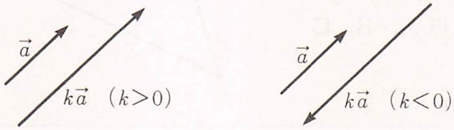
　$\vec{a}$，$\vec{b}$ の向きが一致するか，または，逆向きである

とき，

　"$\vec{a}$，$\vec{b}$ は **平行** である" といい，$\vec{a}\,/\!/\,\vec{b}$ と書くことにする．そうすると，

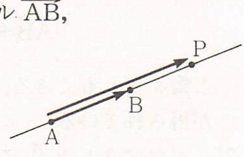
> $\vec{a}$，$\vec{b}$ が $\vec{0}$ でないとき
> $\vec{a}\,/\!/\,\vec{b}$　$\Longleftrightarrow$　$\vec{b}=k\vec{a}$ となる，0でない実数 k が存在する．

ベクトルの平行条件



1°　異なる2点A，Bを通る直線を考える．この直線上の任意の点をPとして，ベクトル $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AP}$ を考えると，

$$\left.\begin{array}{l}P\neq A \text{ なら } \overrightarrow{AP}\,/\!/\,\overrightarrow{AB}\\ P=A \text{ なら } \overrightarrow{AP}=\vec{0}=0\overrightarrow{AB}\end{array}\right\}$$



である．したがって，

　$\overrightarrow{AP}=k\overrightarrow{AB}$ を満たす実数 k が存在する　…☆

ことになる．

逆に，ある点Pに対して☆が成立するならば，

$$\left.\begin{array}{l} k\neq 0 \text{ なら } \overrightarrow{\mathrm{AP}} /\!/ \overrightarrow{\mathrm{AB}} \\ k=0 \text{ なら } \quad \mathrm{P}=\mathrm{A} \end{array}\right\}$$

となるので，P は直線 AB 上の点である．

> 2 点 A，B を結ぶ直線上に点Pがある．
> $$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{\mathrm{AP}}=k\overrightarrow{\mathrm{AB}} \\ \text{を満たす実数 } k \text{ が存在する．} \end{array}\right.$$

3 点の共線条件

2°　上記において，k の値に，たとえば，“$0<k<1$” という制限をつけると，“2 点 A，B を結ぶ線分 (端点を除く) 上に点Pがある” 条件となる．

A1.3　ベクトルの和

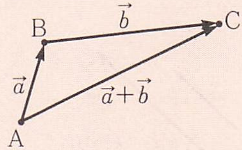
I．ベクトルの加法

[定義]　任意のベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ に対して，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ との和 $\vec{a}+\vec{b}$ とは，次のようなベクトルである．

$$\left\{\begin{array}{l} \vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{AB}} \\ \vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{BC}} \end{array}\right.$$

となるように点 A，B，C をとるとき，

$$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{a}+\vec{b}$$



ベクトルの和の定義

1°　上の定義を

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

ベクトルの和の定義の別の表現

と書くこともできる．左辺の 2 個所のBを “接着剤” として右辺が得られている．

2°　ゼロベクトル $\vec{0}$ については，$\vec{a}$ を任意のベクトルとして

$$\vec{a}+\vec{0}=\vec{a},\quad \vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$$

が成り立つ．

3°　$\vec{a}$，$\vec{b}$ を任意のベクトルとして

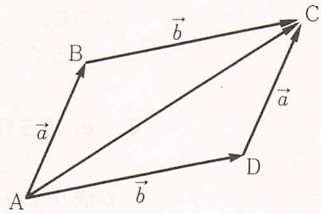
$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$$

が成り立つ．

このことは右の図から読みとれる．

なお，この図は，$\vec{a}$，$\vec{b}$ を表す有向線分を2隣辺とする平行四辺形を作ると，その対角線が $\vec{a}+\vec{b}$ を表すことを示している．

この作図法を“ベクトルの平行四辺形による合成”という．



4°　3個以上のベクトルの和を考えることができる．

$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を任意のベクトルとするとき，

$\vec{a}+\vec{b}$ と $\vec{c}$ との和 $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$

および

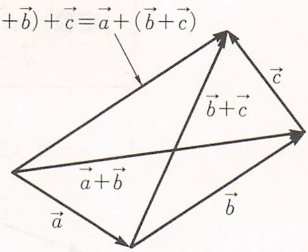
$\vec{a}$ と $\vec{b}+\vec{c}$ との和 $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$

が考えられるが，この両者は等しい．

すなわち，

$$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$$

である(右の図参照)．



このように，$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ の3ベクトルを加えた結果は，加える順序に影響されない．そこで，$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ の和を，加える順序を指定せずに，$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ と書いてもよいことになる．

$$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$$

5°　α を任意の実数，$\vec{a}$，$\vec{b}$ を任意のベクトルとするとき，

$$\alpha(\vec{a}+\vec{b})=\alpha\vec{a}+\alpha\vec{b}$$

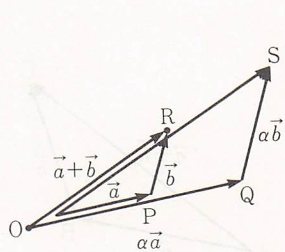
が成り立つ．

右の図から，$\alpha>0$ の場合について上式が成立することが次のようにして読みとれる．

$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{PR}}$ のとき，△OPR を α 倍に相似拡大して △OQS をつくると，

$$\alpha\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}},\quad \alpha\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{QS}}$$

和の定義と三角形の相似から，



$$\overrightarrow{OR}=\vec{a}+\vec{b},\ \overrightarrow{OS}=\alpha\overrightarrow{OR}\ \text{かつ}\ \overrightarrow{OS}=\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{QS}$$

である．

よって

$$\alpha(\vec{a}+\vec{b})=\overrightarrow{OS}=\alpha\vec{a}+\alpha\vec{b}.$$

6° α，β を任意の実数，$\vec{a}$ を任意のベクトルとして

$$(\alpha+\beta)\vec{a}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{a}$$

が成り立つ．

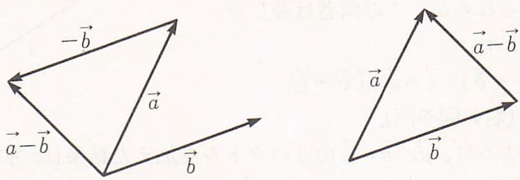
II．ベクトルの減法

$\vec{a}$，$\vec{b}$ を任意のベクトルとするとき，$\vec{a}$ に $\vec{b}$ の逆ベクトル $-\vec{b}$ を加えることにより $\vec{a}-\vec{b}$ を定義する．すなわち，

[定義] $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$ により，
$\vec{a}-\vec{b}$ を定める．

ベクトルの減法

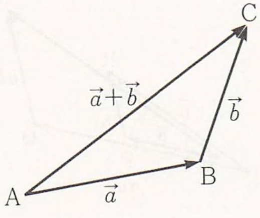
1° $\vec{a}-\vec{b}$ の作図法は下図から明らかであろう．



2° $\vec{x}=\vec{a}-\vec{b}$ とおけば，$\vec{x}$ は $\vec{x}+\vec{b}=\vec{a}$ の解である（上の図からもわかる）．すなわち，減法は，加法の逆演算である．

3° $\vec{a}-\vec{a}=\vec{0}$，$\vec{a}-\vec{0}=\vec{a}$，$\vec{0}-\vec{a}=-\vec{a}$ が任意の $\vec{a}$ に対して成り立つ．

III．三角不等式



次に，2つのベクトルの和の大きさと，それぞれの大きさの和との関係を調べよう．

ベクトルの和の作図法と，三角形の辺の長さの満たす不等式を結びつける．すなわち，

$$AB=|\vec{a}|,\ BC=|\vec{b}|$$
$$AC=|\vec{a}+\vec{b}|$$

に対し

$$AC\leqq AB+BC$$

が成立している．これらから，次の関係が得られる．

> $\vec{a}$，$\vec{b}$ を任意のベクトルとして
>
> $$|\vec{a}+\vec{b}| \leqq |\vec{a}|+|\vec{b}|$$
>
> が成り立つ．
>
> 等号が成立するのは，
>
> i）$\vec{a}$，$\vec{b}$ の少なくとも一方が $\vec{0}$
>
> ii）$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の向きが一致する
>
> のいずれかの場合である．

ベクトルの三角不等式

Ⅳ．ベクトルの演算についての基本公式

以上でのべたベクトルの性質を計算の基本公式としてまとめると，次のようになる．

> **[定理]**　$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ の任意のベクトル，α，β を任意の実数として，次の等式が成立する．
>
> (1)　$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$　（和の交換法則）
>
> (2)　$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$　（和の結合法則）
>
> (3)　$\alpha(\vec{a}+\vec{b})=\alpha\vec{a}+\alpha\vec{b}$　（分配法則Ⅰ）
>
> (4)　$(\alpha+\beta)\vec{a}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{a}$　（分配法則Ⅱ）
>
> (5)　$\alpha(\beta\vec{a})=(\alpha\beta)\vec{a}$　（係数結合法則）
>
> (6)　$1\vec{a}=\vec{a}$　（係数結合法則）
>
> (7)　$(-1)\vec{a}=-\vec{a}$
>
> (8)　$0\vec{a}=\vec{0}$
>
> (9)　$\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$

ベクトルの計算公式（ベクトルの公理）

> **[定理]**
>
> (1)　$\vec{a}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}$　　(4)　$0\vec{a}=\vec{0}$
>
> (2)　$\vec{0}-\vec{a}=-\vec{a}$　　(5)　$\alpha\vec{0}=\vec{0}$
>
> (3)　$\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{a}-\vec{a}=\vec{0}$
>
> $\vec{a}$ は任意のベクトル，α は任意の実数

ゼロベクトルの性質

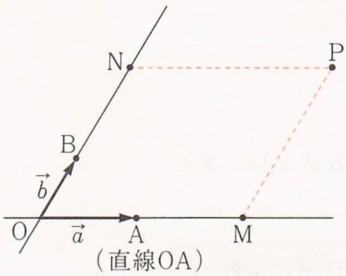
V．ベクトルの分解表示

どちらも $\vec{0}$ でなく，また，たがいに平行でない2つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ を固定して考える．

このとき，次に説明するように任意のベクトル $\vec{p}$ は，適当な実数 α，β をえらぶことにより

$$\vec{p}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b} \quad \cdots\cdots\cdots①$$

の形に表される．この表し方を，p の $\vec{a}$，$\vec{b}$ の方向への分解ということがある．



［説明］

平面に点Oを定め，3点A，B，Pを

$$\overrightarrow{OA}=\vec{a},\ \overrightarrow{OB}=\vec{b},\ \overrightarrow{OP}=\vec{p}$$

となるように取る．

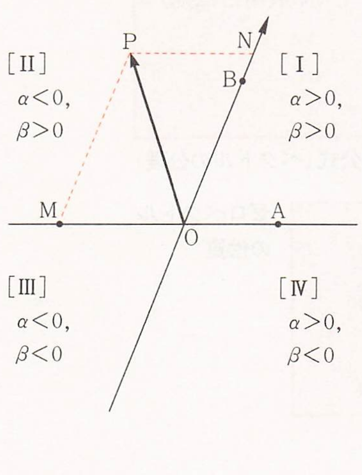
Pを通り，直線OB（直線OA）に平行な直線が直線OA（直線OB）と交わる点をM(N)とする．このとき

$$\vec{p}=\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON} \quad \cdots\cdots\cdots②$$

一方，Mが直線OA上にあるから，$\overrightarrow{OM}=\alpha\overrightarrow{OA}$ となるような実数 α が存在する．

同様に，Nが直線OB上にあるから $\overrightarrow{ON}=\beta\overrightarrow{OB}$ となるような実数 β が存在する．

よって，これらを②に代入すると①が得られるのである．



1°　たとえば，Pが図の［II］の部分にあれば，$\overrightarrow{OM}$ は $\overrightarrow{OA}$ と向きが逆であるから，$\alpha<0$ である．

すなわち，Pが［II］にあるときは，

$$\alpha<0,\ \beta>0$$

であることがわかる．

Pが他の部分にあるときの α，β の符号は図に記入した通りである．

さらに，Pが直線OA上にあるときは $\beta=0$，直線OB上にあるときは $\alpha=0$ であることもわかる．

とくに，PがOと一致するときに限って $\alpha=\beta=0$ となる．

すなわち①において

$$\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}=\vec{0} \iff \alpha=\beta=0 \qquad \cdots\cdots\cdots(*)$$

である．

2°　上の(＊)が成り立つとき，$\vec{a}$, $\vec{b}$ は，一般論では **線型独立** であるといわれる(☞ B.110)．**$\vec{0}$ でなく，たがいに平行でない2つの平面のベクトルは線型独立である** ということになる．

なお，$\vec{a}$, $\vec{b}$ が線型独立ならば

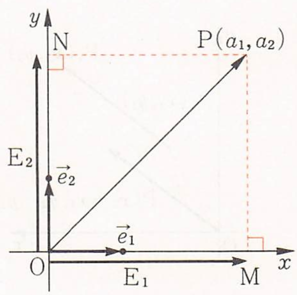
$$\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}=\gamma\vec{a}+\delta\vec{b} \iff \begin{cases}\alpha=\gamma\\ \beta=\delta\end{cases}$$

である．したがって，任意のベクトル $\vec{p}$ を①の形に分解したときの係数は $\vec{p}$ によって一通りにきまる．

A1.4　ベクトルの成分

I．成分表示と基本ベクトル表示

平面に図のような xy 座標軸を取り原点をOとする．



いま，ベクトル $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$ を

$\vec{e_1}$＝“x 軸の正の向きをもつ単位ベクトル”

$\vec{e_2}$＝“y 軸の正の向きをもつ単位ベクトル”

とおく．この $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$ をそれぞれ x 軸方向，y 軸方向の **基本ベクトル** という．基本ベクトルを用いて，任意のベクトルを分解表示しよう．

2点 E_1, E_2 を $E_1(1,\ 0)$, $E_2(0,\ 1)$ とすれば,

$$\vec{e_1}=\overrightarrow{OE_1}, \qquad \vec{e_2}=\overrightarrow{OE_2}$$

である.

さて, この平面の任意のベクトル $\vec{a}$ が与えられたとき, 点Pを $\vec{a}=\overrightarrow{OP}$ となるように取る. Pの座標を $(a_1,\ a_2)$ とおく. すなわち, $P=P(a_1,\ a_2)$.

Pから x 軸, y 軸にそれぞれ下した垂線の足をM, Nとすれば, M, Nの座標は,

$$M=M(a_1,\ 0), \qquad N=N(0,\ a_2)$$

したがって, ベクトルの実数倍の定義によれば

$$\overrightarrow{OM}=a_1\vec{e_1}, \qquad \overrightarrow{ON}=a_2\vec{e_2}$$

また, ベクトルの和の定義によれば,

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}$$

よって,

$$\vec{a}=a_1\vec{e_1}+a_2\vec{e_2} \qquad \cdots\cdots\cdots ①$$

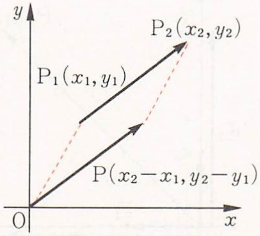
①をベクトル $\vec{a}$ の **基本ベクトル表示** という. また, 係数 a_1, a_2 を $\vec{a}$ の **x 成分**, **y 成分** という.

> **[定理]** 任意のベクトル $\vec{a}$ は,
>
> $$\vec{a}=a_1\vec{e_1}+a_2\vec{e_2}$$
>
> (a_1, a_2 は $\vec{a}$ で定まる定数)
>
> と基本ベクトル表示される.

基本ベクトル表示と成分

1° 座標平面の2点 $P_1(x_1,\ y_1)$, $P_2(x_2,\ y_2)$ が与えられるとき, ベクトル $\overrightarrow{P_1P_2}$ の x 成分は x_2-x_1, y 成分は y_2-y_1 である. したがって

$$\overrightarrow{P_1P_2}=(x_2-x_1)\vec{e_1}+(y_2-y_1)\vec{e_2}$$



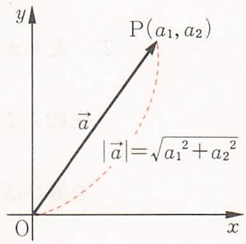
> **[定義]** 平面のベクトル $\vec{a}$ の基本ベクトル表示が
>
> $$\vec{a}=a_1\vec{e_1}+a_2\vec{e_2}$$
>
> であるとき, $\vec{a}$ を簡単に
>
> $$\vec{a}=(a_1,\ a_2) \qquad \cdots\cdots\cdots ②$$
>
> で表す.
>
> これを $\vec{a}$ の **成分表示** という.

ベクトルの成分表示

2°　$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$ ならば，図において

$$|\vec{a}|=|\overrightarrow{OP}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2}$$

すなわち，



[定義]　$\vec{a}=(a_1,\ a_2)=a_1\vec{e_1}+a_2\vec{e_2}$

であるとき，$\vec{a}$ の大きさ $|\vec{a}|$ は

$$|\vec{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2}$$

で与えられる．

成分表示とベクトルの大きさ

3°

$$\vec{a}=(a_1,\ a_2),\quad \vec{b}=(b_1,\ b_2)$$

とおけば，

$$\vec{a}=\vec{b} \iff \begin{cases} a_1=b_1 \\ a_2=b_2 \end{cases}$$

成分表示とベクトルの相等

4°　とくに　$\vec{e_1}=(1,\ 0)$，$\vec{e_2}=(0,\ 1)$，$\vec{0}=(0,\ 0)$

5°　$\vec{a}$ の x 成分，y 成分がそれぞれ a_1，a_2 であることを②のように書くかわりに

$$\vec{a}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

と“縦書き”することがある．このように成分を縦書きしたベクトルを，**縦ベクトル**，それに対して②のように成分を横書きしたベクトルを，**横ベクトル** とよぶ．

高校では，横ベクトルで表すのがふつうであるが，場面によっては，縦ベクトルで表す方が便利なこともある．

II．ベクトルの成分による演算

[定理]

(1)　$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$ のとき，k は任意の実数として

$$k\vec{a}=(ka_1,\ ka_2)$$

(2)　$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2)$ のとき，

i)　$\vec{a}+\vec{b}=(a_1+b_1,\ a_2+b_2)$

ii)　$\vec{a}-\vec{b}=(a_1-b_1,\ a_2-b_2)$

成分と演算

1°　(1)の特別の場合として

$$\vec{a}=(a_1,\ a_2) \text{ のとき } -\vec{a}=(-a_1,\ -a_2)$$

2°　たとえば，(2)の i)が成り立つことを見るのには，

$$\vec{a}=a_1\vec{e_1}+a_2\vec{e_2},\quad \vec{b}=b_1\vec{e_1}+b_2\vec{e_2}$$

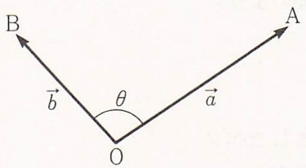
を加えて

$$\vec{a}+\vec{b}=(a_1+b_1)\vec{e_1}+(a_2+b_2)\vec{e_2}$$

を導けばよい．

A1.5 ベクトルの内積

I．内積の定義



$\vec{0}$ でない 2 ベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ のなす角 θ とは，点 O, A, B を $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ となるようにとったときの ∠AOB のことである．

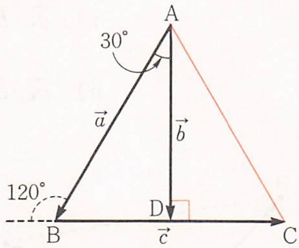
ただし，θ の範囲を $0° \leqq \theta \leqq 180°$ にとることにする．

内積の定義と記号

> **[定義]**　$\vec{a}$, $\vec{b}$ が $\vec{0}$ でないとき，$\vec{a}$, $\vec{b}$ の内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ とは，実数
>
> $$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$
>
> のことである．ただし，θ は $\vec{a}$, $\vec{b}$ のなす角である．
>
> また，$\vec{a}$, $\vec{b}$ のいずれかが $\vec{0}$ のときには，$\vec{a}$, $\vec{b}$ の内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ は 0 と定める．
>
> すなわち，
>
> $$\vec{0}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{0}=0$$

1°　$\vec{a}$, $\vec{b}$ の内積を表す記号としては，$\vec{a}\cdot\vec{b}$ の他に，$(\vec{a},\ \vec{b})$ も用いられる．

2°　[例]　1辺の長さ2の正三角形ABCの辺BCの中点をDとし,



$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$, $\overrightarrow{BC}=\vec{c}$ とすれば,

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=2\cdot\sqrt{3}\cdot\cos 30°=3$$

$$\vec{a}\cdot\vec{c}=2\cdot 2\cdot\cos 120°=-2$$

$$\vec{b}\cdot\vec{c}=\sqrt{3}\cdot 2\cdot\cos 90°=0$$

3°　内積の定義からただちに,

[定理]　任意の $\vec{a}$, $\vec{b}$ に対して

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$$

内積の対称性

4°　内積の定義よりただちに,

[定理]　$\vec{a}$, $\vec{b}$ が $\vec{0}$ でないとき,

$\vec{a}$, $\vec{b}$ のなす角が鋭角 $\Longleftrightarrow$ $\vec{a}\cdot\vec{b}>0$

$\vec{a}$, $\vec{b}$ のなす角が直角 $\Longleftrightarrow$ $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

$\vec{a}$, $\vec{b}$ のなす角が鈍角 $\Longleftrightarrow$ $\vec{a}\cdot\vec{b}<0$

ベクトルのなす角と内積の符号

5°　内積の定義で $\vec{a}=\vec{b}$ のときを考えて,

$$\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2,\quad \sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}=|\vec{a}|$$

ベクトルの大きさと内積との関係

6°　また, $-1\leqq\cos\theta\leqq 1$ に相当して,

[定理]　$(\vec{a}\cdot\vec{b})^2\leqq|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2$

すなわち,

$$-|\vec{a}||\vec{b}|\leqq\vec{a}\cdot\vec{b}\leqq|\vec{a}||\vec{b}|$$

シュバルツの不等式

II. 内積と成分

[定理]　$\vec{a}$, $\vec{b}$ の成分表示が

$$\vec{a}=(a_1,\ a_2),\quad \vec{b}=(b_1,\ b_2)$$

ならば

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2$$

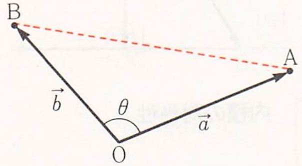
内積の成分表示(平面のベクトル)

1°　**証明**：

i）$\vec{a}$, $\vec{b}$ の少なくとも一方が $\vec{0}$ なら,

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=0=a_1b_1+a_2b_2$$

ii）$\vec{a}$, $\vec{b}$ のいずれもが $\vec{0}$ でないとき.



いま, $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とし, $\angle AOB=\theta$ とすると, $0°<\theta<180°$ なら, △OAB に余弦定理を用いて

$$2OA\cdot OB\cos\theta=OA^2+OB^2-AB^2 \quad \cdots\cdots ①$$

$\theta=0$, π のときには, △OAB はできないが, このときにも①が成立することが確かめられる.

ところが, 2 点間の距離の公式より

$$\begin{cases} OA^2=a_1{}^2+a_2{}^2=|\vec{a}|^2 \\ OB^2=b_1{}^2+b_2{}^2=|\vec{b}|^2 \\ AB^2=(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2 \end{cases}$$

であるから,

$$\left.\begin{array}{l} ①の左辺=2OA\cdot OB\cos\theta=2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=2(\vec{a}\cdot\vec{b}) \\ ①の右辺=OA^2+OB^2-AB^2=2(a_1b_1+a_2b_2) \end{array}\right\}$$

である. ■

2°　この定理と内積の定義とから, 成分表示された 2 つのベクトルのなす角が求められる.

> [定理]　$\vec{0}$ でない $\vec{a}=(a_1,\ a_2)$, $\vec{b}=(b_1,\ b_2)$ のなす角を θ とすれば
>
> $$\cos\theta=\frac{a_1b_1+a_2b_2}{\sqrt{a_1{}^2+a_2{}^2}\sqrt{b_1{}^2+b_2{}^2}}$$

ベクトルの交角と成分

3°　$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$ と基本ベクトル $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$ について

$$a_1=\vec{a}\cdot\vec{e_1},\quad a_2=\vec{a}\cdot\vec{e_2}$$

である.

Ⅲ. ベクトルの直交

$\vec{0}$ でない 2 つのベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ が **直交** するのは, 交角 θ が $90°$ のときである.

したがって $\cos\theta=0$ が $\vec{a}$, $\vec{b}$ が直交するための条件である. すなわち,

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$$

が, $\vec{a}$, $\vec{b}$ の直交条件である.

$\vec{a}$, $\vec{b}$ の少なくとも一方が $\vec{0}$ のときは，交角は定まらないが，$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ である．

この場合も $\vec{a}$, $\vec{b}$ は直交するという．

記号では，$\vec{a}$, $\vec{b}$ が直交することを，$\vec{a}\perp\vec{b}$ で表す．まとめると，

内積と直交性

> ベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ が直交する，すなわち
> $$\vec{a}\perp\vec{b} \iff \vec{a}\cdot\vec{b}=0$$

1°　ゼロベクトル $\vec{0}$ は任意のベクトルと直交する．

2°　ベクトルの成分表示を用いると次の関係が得られる．

成分と直交性(平面のベクトル)

> 2つの平面のベクトル
> $$\vec{a}=(a_1,\ a_2),\quad \vec{b}=(b_1,\ b_2)$$
> について，
> $$\vec{a}\perp\vec{b} \iff a_1b_1+a_2b_2=0$$

IV．内積の計算規則

次に内積の計算によく用いられる性質をまとめておこう．

内積の基本性質

> **[定理]**　内積は次の性質をもつ．
>
> i)　任意の $\vec{a}$, $\vec{b}$ に対して，$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$
>
> ii)　$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ を任意のベクトル，k を任意の実数として次の等式が成り立つ．
>
> $$(k\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(k\vec{b})=k(\vec{a}\cdot\vec{b})$$
> $$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c},$$
> $$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$$

証明：　i)は定義から明らか．

ii)は，成分表示 $\vec{a}=(a_1,\ a_2)$, $\vec{b}=(b_1,\ b_2)$, $\vec{c}=(c_1,\ c_2)$ を用いて計算を遂行すれば得られる．

A1.6 位置ベクトル(平面)

I．平面の点の位置ベクトル

位置ベクトル

平面に定点Oを固定する．この平面の任意の点Pに対して，$\overrightarrow{OP}=\vec{p}$ となる $\vec{p}$ を対応させる．
このベクトル $\vec{p}$ を，Oを基準点とする

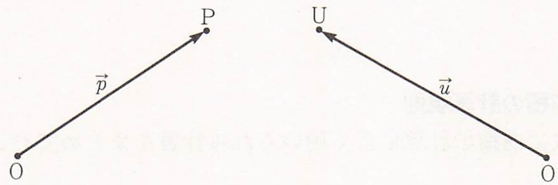
Pの位置ベクトル

という．

1° 逆に，平面のベクトル $\vec{u}$ が与えられたとき，$\overrightarrow{OU}=\vec{u}$ となる点Uを作図することができる．このUの位置ベクトルは $\vec{u}$ である．
したがって，

点P $\longleftrightarrow$ Pの位置ベクトル $\vec{p}$

を対応させることにより，平面の点全体とベクトルの全体とが1対1に対応する(Oを固定したときの話)．



2° 点Pの位置ベクトルが $\vec{p}$ であることをP($\vec{p}$)のように書く．
また，記号P($\vec{p}$)は，$\vec{p}$ を位置ベクトルとする点Pを表すためにも用いられる．

3° 位置ベクトルの基準点Oを座標原点とする xy 座標軸を用いれば，点Pの座標とPの位置ベクトルの成分表示とは一致する．

原点を基準点とする場合，

点Pの座標が$(a,\ b)$である $\Longleftrightarrow$ 点Pの位置ベクトル $\vec{p}$ の成分が$(a,\ b)$である

座標と成分

II．ベクトルの演算と位置ベクトル

ベクトルには，加法，定数倍，内積などの演算が定義されている．これらを利用し，位置ベクトルで点を表すと，点に関する幾何学的な条件をまとまりよく表すことが可能となる．

$A(\vec{a})$，$B(\vec{b})$ のとき，

$$\overrightarrow{AB}=\vec{b}-\vec{a}$$

であることは基本的である．さらに，

2点間の距離

2点 $P(\vec{p})$，$Q(\vec{q})$ の間の距離は

$$|\vec{p}-\vec{q}|$$

である．

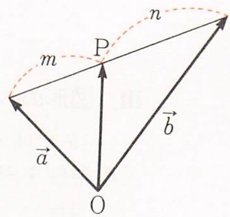
分点の位置ベクトル

異なる2点 $A(\vec{a})$，$B(\vec{b})$ を $m：n$ に内分する点Pの位置ベクトル $\vec{p}$ は

$$\vec{p}=\frac{n\vec{a}+m\vec{b}}{m+n} \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

とくに，ABの中点Mの位置ベクトル $\vec{p}$ は

$$\vec{p}=\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$$



ガイド　証明については　☞B.101

1°　①を成分に分けて書けば，数学IIで学んだ分点の座標の公式が得られる．

2°　①において $s=\dfrac{m}{m+n}$ とおけばわかるように，A，Bの位置ベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて

$$\vec{p}=(1-s)\vec{a}+s\vec{b} \quad (0<s<1)$$

で表される $\vec{p}$ を位置ベクトルに持つ点 $P(\vec{p})$ は，線分 AB を $s：1-s$ に内分する点であり，s が $0<s<1$ の範囲を動けば，$P=P(\vec{p})$ は，線分 AB 上(両端を除く)を動く．$s=0$，$s=1$ も合せて考えると

$$p=(1-s)\vec{a}+s\vec{b} \quad (0\leqq s\leqq 1)$$

のとき，$P(\vec{p})$ は(両端を含めた)線分 AB 上を動く．

これより，A，B を異なる2点として

A($\vec{a}$)，B($\vec{b}$) のとき，点 P($\vec{p}$) に関し
P が線分 AB (両端を含む) 上にある
$\iff \begin{cases} \vec{p}=(1-s)\vec{a}+s\vec{b} \quad (0 \leqq s \leqq 1) \\ \text{であるような } s \text{ の値が存在する.} \end{cases}$

線分と位置ベクトル

同様に

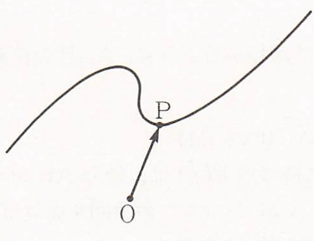
A($\vec{a}$)，B($\vec{b}$) のとき，P($\vec{p}$) に関し
P が直線 AB 上にある $\iff \begin{cases} \vec{p}=(1-s)\vec{a}+s\vec{b} \\ \text{であるような実数 } s \text{ が存在する.} \end{cases}$

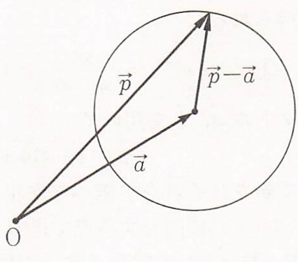
直線と位置ベクトル

Ⅲ. 図形のベクトル方程式

xy 平面の曲線 C の方程式は，点 P(x，y) が C に属するための条件を座標 x，y を用いて書き表したものである．

同様に，点 P($\vec{p}$) が C に属するための条件を $\vec{p}$ を用いて書き表したものは，C の **ベクトル方程式** とよばれる．





[円のベクトル方程式]

円の方程式

点 A($\vec{a}$) を中心とする半径 r の円周のベクトル方程式は

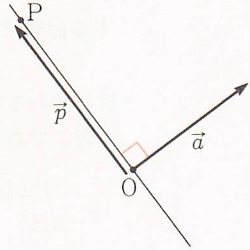
$$|\vec{p}-\vec{a}|=r \qquad \cdots\cdots ①$$

[直線のベクトル方程式]

$\vec{a}$を与えられた$\vec{0}$でないベクトルとするとき，

$$\vec{p}\cdot\vec{a}=0 \quad \cdots\cdots\cdots ②$$

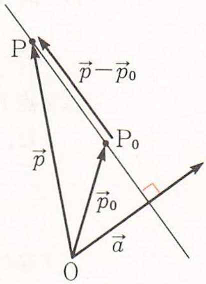
は，原点を通り$\vec{a}$と直交する直線のベクトル方程式である．



1°　直線②に対し，$\vec{a}$は **法線ベクトル** になっている．

$\vec{a}\neq\vec{0}$ を与えられたベクトル，$P_0(p_0)$を与えられた点とするとき，P_0を通り$\vec{a}$と直交する直線のベクトル方程式は

$$(\vec{p}-\vec{p_0})\cdot\vec{a}=0 \quad \cdots\cdots\cdots ③$$



2°　③で，$\vec{p_0}\cdot\vec{a}=k$ とおけば

$$\vec{p}\cdot\vec{a}=k$$

一般に，

$\vec{a}\neq\vec{0}$ を与えられたベクトル，kを定数とするとき，ベクトル方程式

$$\vec{p}\cdot\vec{a}=k \quad \cdots\cdots\cdots ④$$

は直線を表す．

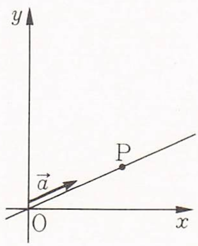
[直線の媒介変数表示]　$\vec{a}\neq\vec{0}$ を与えられたベクトルとするとき，

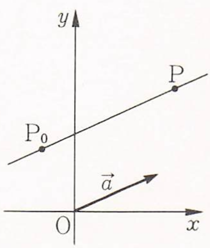
$$\vec{p}=t\vec{a}\quad(t\text{ は実数}) \quad \cdots\cdots\cdots ⑤$$

を位置ベクトルにもつ点$P(\vec{p})$の集合は，原点Oと点$A(\vec{a})$を通る直線を表す．$\vec{a}$はこの直線の方向ベクトルである．

さらに，一点 $P_0=P_0(\vec{p_0})$ が与えられたとき，

$$\vec{p}=\vec{p_0}+t\vec{a}\ (t\text{ は実数}) \quad \cdots\cdots\cdots ⑥$$





を位置ベクトルにもつ点 $P(\vec{p})$ の集合は，点 P_0 を通り，OA と平行な直線を表す．これを，P_0 を通り $\vec{a}$ を方向ベクトルとする直線という．

1°　⑤あるいは⑥は，それぞれの直線の，ベクトル形での媒介変数表示である．すなわち

> $P_0(\vec{p_0})$ を通り，$\vec{a}$ を方向ベクトルとする直線の媒介変数表示は
> $$\vec{p}=\vec{p_0}+t\vec{a}\quad(t\text{ は実数})$$

2°　異なる 2 点 $P_0(\vec{p_0})$，$P_1(\vec{p_1})$ を結ぶ直線の方向ベクトルとして $\vec{p_1}-\vec{p_0}$ を採用することができる．したがって

$$\vec{p}=\vec{p_0}+t(\vec{p_1}-\vec{p_0})$$
$$=(1-t)\vec{p_0}+t\vec{p_1}\quad(t\text{ は実数})$$

は 2 点 P_0，P_1 を結ぶ直線の媒介変数表示である．

また，

線分の媒介変数表示

> $$\vec{p}=\vec{p_0}+t(\vec{p_1}-\vec{p_0})\quad(0\leqq t\leqq 1)$$
> すなわち
> $$\vec{p}=(1-t)\vec{p_0}+t\vec{p_1}\quad(0\leqq t\leqq 1)$$
> は線分 P_0P_1（両端を含む）のベクトル形での媒介変数表示である．

新課程「数学B」で空間ベクトル・空間図形は大幅に簡略化された．しかし，2次元の紙に描けない空間図形に対する解析的アプローチは，本来，高校数学の最も魅力的な話題である．本書を読む読者の能力といきごみを考慮して，やや発展的に叙述を進めよう．

A1.7　空間の座標

空間の点を座標を用いて表す方法は，平面の部分のそれから容易に類推できるが，一応，用語の確認をしておく．

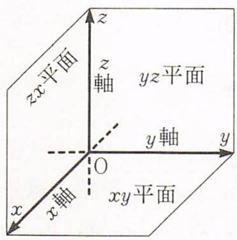
I．空間の座標系

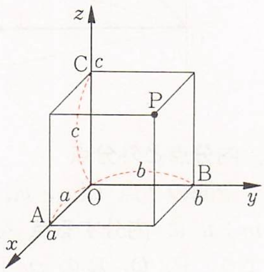
1°　空間の1点O(原点)で互いに直交する3本の数直線Ox，Oy，Ozをとり，それぞれx軸，y軸，z軸という．またこれらの空間の座標軸をまとめて **空間の座標系** という．

次に，x軸とy軸とが定める平面をxy平面という．yz平面，zx平面についても同様であり，これらを合わせて **座標平面** という．

点Pが与えられたとき，Pを通り各座標平面に垂直な平面を作り，これらがx軸，y軸，z軸と交わる点をそれぞれA，B，Cとする．点A，B，Cの各座標軸上での座標がそれぞれa，b，cであるとき，この順で並べた数の組 $(a,\ b,\ c)$ を **点Pの座標** という．

点Pの座標が $(a,\ b,\ c)$ であるとき，$\mathrm{P}(a,\ b,\ c)$ と書く．このとき，aをPのx座標という．bはy座標，cはz座標である．





2°　点 $\mathrm{P}(a,\ b,\ c)$ からxy平面に下した垂線の足，すなわちPのxy平面への正射影は点 $\mathrm{P'}(a,\ b,\ 0)$ である．同様にPのyz平面への正射影は点 $(0,\ b,\ c)$，zx平面への正射影は点 $(a,\ 0,\ c)$ である．

3°　x 座標が定数 a であるような点全体の集合は，点 $(a,\ 0,\ 0)$ を通り yz 平面に平行な平面である．この平面の方程式は $x=a$ である．

同様に，平面 $y=b$，平面 $z=c$ はそれぞれ zx 平面，xy 平面に平行な平面である．

4°　x 軸，y 軸，z 軸の方向にそれぞれ α，β，γ だけ移動する **平行移動** によって

点 $\mathrm{P}(a,\ b,\ c)$　は　点 $\mathrm{Q}(a+\alpha,\ b+\beta,\ c+\gamma)$

に移される．

II．2点間の距離

原点Oと点 $\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$ の距離 OP は

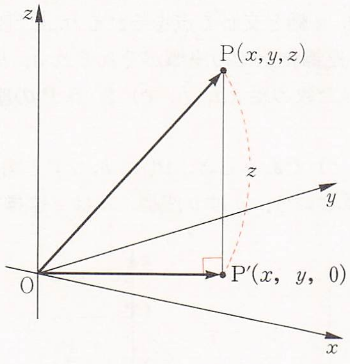
$$\mathrm{OP}=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

である．

一般に，2点 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1,\ z_1)$，$\mathrm{Q}(x_2,\ y_2,\ z_2)$ 間の距離 PQ は

$$\mathrm{PQ}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

で与えられる．



$$\mathrm{OP'}=\sqrt{x^2+y^2}$$
$$\mathrm{OP}=\sqrt{(\mathrm{OP'})^2+z^2}$$
$$=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

III．内分点と外分点

空間の2点 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1,\ z_1)$，$\mathrm{Q}(x_2,\ y_2,\ z_2)$ を結ぶ線分 PQ を $m:n$ に **内分する点** を $\mathrm{R}(x,\ y,\ z)$ とし，x，y，z を求めよう．P，Q，R の xy 平面上への正射影を P′，Q′，R′ とすれば

$$\mathrm{P'}(x_1,\ y_1,\ 0),\ \mathrm{Q'}(x_2,\ y_2,\ 0),\ \mathrm{R'}(x,\ y,\ 0)$$

であり，R′ は線分 P′Q′ を $m:n$ に内分している．よって平面の場合の公式より

$$x=\frac{mx_2+nx_1}{m+n},\quad y=\frac{my_2+ny_1}{m+n}$$

z を求めるには yz 平面への正射影を考えればよい．結局，線分 PQ の内分点Rは

$$\mathrm{R}=\mathrm{R}\left(\frac{nx_1+mx_2}{m+n},\ \frac{ny_1+my_2}{m+n},\ \frac{nz_1+mz_2}{m+n}\right)$$

である．

1°　上のP，Qの **中点** をMとすれば，$m=n$ の場合であるから

$$\mathrm{M}=\mathrm{M}\left(\frac{x_1+x_2}{2},\ \frac{y_1+y_2}{2},\ \frac{z_1+z_2}{2}\right)$$

2°　上のP，Qを $m:n$ に **外分する点** をEとすれば

$$\mathrm{E}=\mathrm{E}\left(\frac{-nx_1+mx_2}{m-n},\ \frac{-ny_1+my_2}{m-n},\ \frac{-nz_1+mz_2}{m-n}\right)$$

A1.8　空間のベクトル

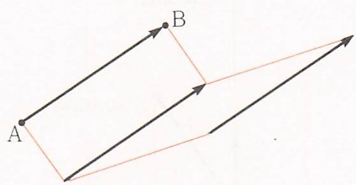
I．空間のベクトルの概念

平面上のベクトルと同様に，空間においても，有向線分 AB の向きと長さだけを考え，位置を無視したとき，それを **空間のベクトル** または単に **ベクトル** といい，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ で表す．

また，$\vec{a}$ のように矢印をつけた1つの文字でも表す．

1°　ベクトルの **大きさ** は前のように $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|$ または $|\vec{a}|$ と書く．

ベクトルの意味より，2つのベクトルが等しいというのは，大きさと向きがそれぞれ一致することである．



2°　**零ベクトル，単位ベクトル** の定義，ベクトルの **平行** の定義，ベクトルの **加法** や **実数倍** の定義など，すべて平面の場合と同様である．

加法や実数倍について，平面の場合に述べた基本性質は，空間ベクトルについてもそのまま保たれる．

3°　**(線型独立なベクトルによる分解表示)**　平面の場合には，2 つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ が線型独立であるとは

$$\begin{cases} \vec{a} \neq \vec{0}, \quad \vec{b} \neq \vec{0} \\ \vec{a} \parallel \vec{b} \text{ でない} \end{cases}$$

ことであった．そして，$\vec{a}$，$\vec{b}$ が線型独立ならば，任意の平面のベクトル $\vec{p}$ に対して，係数 l，m が一通りに定まり，$\vec{p}$ は

$$\vec{p} = l\vec{a} + m\vec{b}$$

と分解されるのであった．

上のことがらは空間の場合には，次のように拡張される．

空間の **3 つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ が線型独立** であるとは

$$\begin{cases} \vec{a} \neq \vec{0}, \quad \vec{b} \neq \vec{0}, \quad \vec{c} \neq \vec{0} \\ \vec{a}, \ \vec{b}, \ \vec{c} \text{ は同一平面上にない} \end{cases}$$

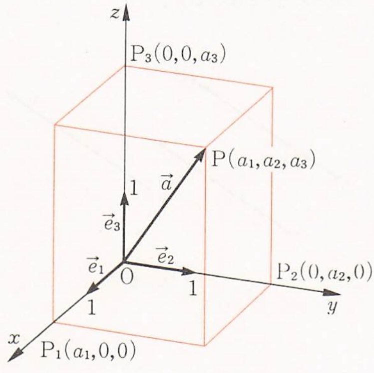
が成り立つことである．

そして，$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ が **線型独立** ならば，任意の空間のベクトル $\vec{p}$ に対して，係数 l，m，n が一通りに定まり，$\vec{p}$ は

$$\vec{p} = l\vec{a} + m\vec{b} + n\vec{c}$$

と **分解表示される** のである．

II．空間ベクトルの成分



1°　**座標軸とベクトル**

空間に座標軸を定めたとき，x 軸，y 軸，z 軸の正の向きと同じ向きの単位ベクトルを，**基本ベクトル** といい，それぞれ $\vec{e}_1$，$\vec{e}_2$，$\vec{e}_3$ で表す．いま，この空間の与えられたベクトル $\vec{a}$ に対し，$\vec{a} = \overrightarrow{OP}$ となる点Pをとって，その座標を (a_1, a_2, a_3) とすれば，$\vec{a}$ は

$$\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3$$

と表される．

a_1, a_2, a_3 をそれぞれ $\vec{a}$ の **x 成分**, **y 成分**, **z 成分** といい, $\vec{a}$ を簡単に

$$\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$$

と表す. これを, 与えられた座標軸に関する $\vec{a}$ の **成分表示** という.

$\vec{a}=a_1\vec{e}_1+a_2\vec{e}_2+a_3\vec{e}_3$	(基本ベクトルによる分解表示)	**ベクトルの表示**
$\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$	(成分表示)	

とくに

$$\vec{e}_1=(1,\ 0,\ 0),\quad \vec{e}_2=(0,\ 1,\ 0),\quad \vec{e}_3=(0,\ 0,\ 1)$$

$$\vec{0}=(0,\ 0,\ 0)$$

また, 2 つのベクトル $\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$, $\vec{b}=(b_1,\ b_2,\ b_3)$ に対して

$$\vec{a}=\vec{b} \iff a_1=b_1,\ a_2=b_2,\ a_3=b_3$$

2° $\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$ のとき, $\vec{a}$ の大きさは

$$|\vec{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$$

と表される.

とくに, $\vec{a}$ が単位ベクトルであるための条件は

$$a_1^2+a_2^2+a_3^2=1$$

である.

一般に, $\vec{a}\neq\vec{0}$ のとき

$$\vec{e}=\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=\frac{(a_1,\ a_2,\ a_3)}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}}$$

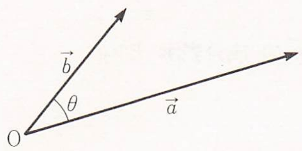
は $\vec{a}$ と同じ向きをもつ単位ベクトルである.

3° **成分による演算**

平面の場合と同様に, 成分による演算について次のことが成り立つ.

$(a_1,\ a_2,\ a_3)+(b_1,\ b_2,\ b_3)=(a_1+b_1,\ a_2+b_2,\ a_3+b_3)$ $(a_1,\ a_2,\ a_3)-(b_1,\ b_2,\ b_3)=(a_1-b_1,\ a_2-b_2,\ a_3-b_3)$ $m(a_1,\ a_2,\ a_3)=(ma_1,\ ma_2,\ ma_3)$	**成分による演算**

Ⅲ. 空間のベクトルの内積



空間においても，$\vec{0}$ でない2つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ の **内積** $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を，$\vec{a}$，$\vec{b}$ のなす角 θ を用いて

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

と定義する．

$\vec{a}=\vec{0}$ または $\vec{b}=\vec{0}$ のときは，$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ と定義する．

1° 平面の場合と同様に，次のことが成り立つ．

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}, \qquad \vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2, \qquad |\vec{a}\cdot\vec{b}|\leqq|\vec{a}||\vec{b}|$$

また，

$$\vec{a}\perp\vec{b} \iff \vec{a}\cdot\vec{b}=0$$

$$\vec{a}\,/\!/\,\vec{b} \iff \vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}| \text{ または } \vec{a}\cdot\vec{b}=-|\vec{a}||\vec{b}|$$

2° **内積と成分**

空間のベクトルについても，平面の場合と同様に，内積を成分を用いて表すことができる．

$\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2,\ b_3)$
のとき

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$$

成分で表した内積

3° $\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$ のとき，$\vec{a}$，$\vec{b}$ のなす角を θ とすれば，

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}$$

4° $\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$ である2つのベクトルが直交するための条件は，これらのなす角 θ が 90° である ($\cos\theta=0$) ことである．また，ゼロベクトルは任意のベクトルと直交するものと定義される．したがって，任意の $\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2,\ b_3)$ について

$$\vec{a}\perp\vec{b} \iff a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0$$

である．

A1.9　空間の直線・球

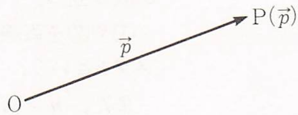
位置ベクトルを用いて図形の性質を調べることは平面の場合について学んだが，この方法は空間の場合にも有効である．

I．空間の点の位置ベクトル

空間においても，1つの点O(基準点)を固定すれば，任意の点Pの位置は，ベクトル

$$\overrightarrow{OP}=\vec{p}$$

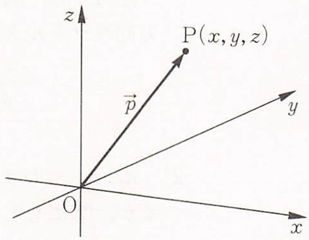
によって定まる．このとき，$\vec{p}$をOを基準とする点Pの **位置ベクトル** という．点Pの位置ベクトルが$\vec{p}$であることを$P(\vec{p})$と書く．



座標軸を定めた空間では，ふつう原点Oを基準点とする．このとき，空間の任意の点Pの座標を$(x,\ y,\ z)$とすれば，Pの位置ベクトル$\vec{p}$の成分表示は

$$\vec{p}=(x,\ y,\ z)$$

となる．



1°　2点$A(\vec{a})$，$B(\vec{b})$，を $m:n$ に内分する点$P(\vec{p})$，外分する点$Q(\vec{q})$の位置ベクトル$\vec{p}$，$\vec{q}$はそれぞれ

$$\vec{p}=\frac{n\vec{a}+m\vec{b}}{m+n},\qquad \vec{q}=\frac{-n\vec{a}+m\vec{b}}{m-n}$$

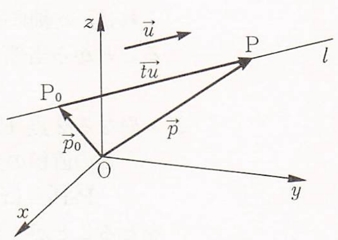
で与えられる．

II．空間における直線の方程式

1°　定点$P_0(\vec{p}_0)$を通り，$\vec{0}$でないベクトル$\vec{u}$に平行な直線――この直線l上の任意の点を$P(\vec{p})$とすれば，tを実数として

$$\vec{p}=\vec{p}_0+t\vec{u}\qquad\cdots\cdots ①$$

と表せる．



①を直線 l の **ベクトル方程式** あるいは **ベクトル表示** という．

いま，成分を用いて

$$\vec{p}=(x,\ y,\ z),\ \ \vec{p}_0=(x_0,\ y_0,\ z_0),\ \ \vec{u}=(a,\ b,\ c)$$

とすれば，①の両辺の各成分を比較することにより

$$\begin{cases} x=x_0+at \\ y=y_0+bt \\ z=z_0+ct \end{cases} \qquad \cdots\cdots\cdots ②$$

が成り立つ．

①や②を直線 l の **媒介変数表示** といい，t を **媒介変数**（パラメタ）という．

また，$\vec{u}=(a,\ b,\ c)$ を直線 l の **方向ベクトル** という．

a，b，c がどれも 0 でないときは，②から t を消去することによって，次の結果が得られる．

直線の方程式

点 $P_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$ を通り，$\vec{u}=(a,\ b,\ c)$ を方向ベクトルとする直線の方程式は

$$\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}$$

2°　a，b，c のうちに 0 があるときには，位置ベクトルで直接考えるか，②にもどってしらべればよい．

たとえば，

$a\neq 0$，$b\neq 0$，$c=0$ のときは②から

$$\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b},\qquad z=z_0$$

となる．これは，xy 平面に平行な直線を表しているが，$\vec{u}$ が xy 平面と平行であることから当然である．

次に，たとえば，

$a\neq 0$，$b=0$，$c=0$ のときは，②によって

$$y=y_0,\qquad z=z_0$$

これは，x 軸に平行な直線を表しているが，$\vec{u}$ が x 軸と平行であることから当然である．

3°　異なる 2 点 $P_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$，$P_1(x_1,\ y_1,\ z_1)$ を通る直線

——この直線の方向ベクトルとしては

$$\overrightarrow{P_0P_1}=(x_1-x_0,\ y_1-y_0,\ z_1-z_0)$$

をとることができる．

したがって，$x_1 \neq x_0$，$y_1 \neq y_0$，$z_1 \neq z_0$ のときは，直線の方程式は次のようになる．方向ベクトルの成分の1つ，あるいは2つが0となる場合の吟味は読者にまかせよう．

2点を通る直線

2点 $(x_0,\ y_0,\ z_0)$，$(x_1,\ y_1,\ z_1)$ を通る直線の方程式は

$$\frac{x-x_0}{x_1-x_0}=\frac{y-y_0}{y_1-y_0}=\frac{z-z_0}{z_1-z_0}$$

III. 球の方程式

空間の定点Cから一定の距離 r にある点Pの軌跡を，中心C，半径 r の **球面** または単に **球** という．位置ベクトルを用いて球の方程式を導く．

C$(\vec{c})$，P$(\vec{p})$ とすれば

$$|\vec{p}-\vec{c}|=r$$

よって

$$|\vec{p}-\vec{c}|^2=r^2$$

成分を用いて

$$\vec{p}=(x,\ y,\ z),\quad \vec{c}=(x_0,\ y_0,\ z_0)$$

とおけば，

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=r^2$$

これが球の方程式である．

球の方程式

点 $(x_0,\ y_0,\ z_0)$ を中心とする半径 r の球の方程式は

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=r^2$$

1°　一般に，方程式

$$x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0 \qquad \cdots\cdots①$$

の表す曲面は(2点以上を含めば)球面を表す．すなわち

$$D=-d+\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}+\frac{c^2}{4}$$

とおくとき，①を満たす x，y，z を座標とする図形は，

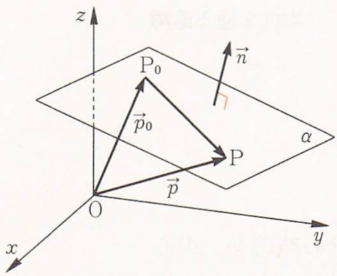
i）$D>0$ ならば中心 $P_0\left(-\frac{a}{2},\ -\frac{b}{2},\ -\frac{c}{2}\right)$，半径 $\sqrt{D}$ の球である．

ii）$D=0$ ならば 1点 P_0 である．　(点球の場合)

iii）$D<0$ ならば 空集合 である．　(虚球の場合)

Ⅳ. 平面の方程式

1°　法線ベクトルと１点が与えられた平面



空間において，定点 $P_0(\vec{p_0})$ を通り，$\vec{0}$ でないベクトル $\vec{n}$ に垂直な平面の方程式を求めてみよう．この平面を α とし，α 上の任意の点を $P(\vec{p})$ とすれば

$$\overrightarrow{P_0P}=\vec{p}-\vec{p_0},\qquad \overrightarrow{P_0P}\perp\vec{n}$$

であるから，

$$\vec{n}\cdot(\vec{p}-\vec{p_0})=0 \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

①が平面 α のベクトル方程式である．

いま，成分を用いて

$$\vec{p}=(x,\ y,\ z),\ \ \vec{p}_0=(x_0,\ y_0,\ z_0),\ \ \vec{n}=(a,\ b,\ c)$$

とおけば①より

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0 \quad \cdots\cdots\cdots ②$$

となる．

ベクトル $\vec{n}=(a,\ b,\ c)$ をこの平面の **法線ベクトル** という．すなわち，

> 点 $P_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$ を通り，$\vec{n}=(a,\ b,\ c)$ を法線ベクトルとする平面の方程式は
> $$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$

1点を通る平面

上の②で $d=-ax_0-by_0-cz_0$ とおけば

$$ax+by+cz+d=0$$

という x，y，z についての１次方程式の形となる．一般に

> １次方程式 $ax+by+cz+d=0$ は，$\vec{n}=(a,\ b,\ c)$ を法線ベクトルとする平面を表す．

平面の方程式

2°　２つの平面

$$\alpha：a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$$
$$\beta：a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$$

が **平行** であるための条件は

$$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$$

であり，**直交** するための条件は

$$a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2=0$$

である．

3°　点 $P(x_0,\ y_0,\ z_0)$ から平面 $ax+by+cz+d=0$ への距離は

$$\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

である．

ガイド☆ ☞証明は B.147，応用例については B.148，B.150 など

——A 1　おわり——

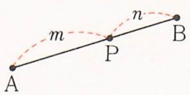


B.101

相異なる2点A，Bの位置ベクトルをそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$ とするとき，線分ABを $m:n$ に内分する点Pの位置ベクトル $\vec{p}$ は，$\vec{p}=\dfrac{n\vec{a}+m\vec{b}}{m+n}$ で与えられることを証明せよ．

アプローチ 位置ベクトルとは，任意の1点を基準点として固定し，その点を始点とするベクトルのことだ，と思うと簡単です．この1点をOとおくと $\overrightarrow{OP}=\dfrac{1}{m+n}(n\overrightarrow{OA}+m\overrightarrow{OB})$ が到達すべき結論です．

さて，証明の出発点はどこにとるとよいでしょうか．



解答 $AP /\!/ AB$，$AP:AB=m:(m+n)$ であるから

▶ これが出発点．

$$\overrightarrow{AP}=\frac{m}{m+n}\overrightarrow{AB}$$

という式が成り立つ．この式を，任意の定点Oを始点とする有向線分の表すベクトルで表すと

$$\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}=\frac{m}{m+n}(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})$$

となる．これより

▶ $\overrightarrow{OP}$ が $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ とで表せた．

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP}&=\overrightarrow{OA}+\frac{m}{m+n}(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})\\&=\frac{(m+n)\overrightarrow{OA}+m(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})}{m+n}\\&=\frac{n\overrightarrow{OA}+m\overrightarrow{OB}}{m+n}\end{aligned}$$

が成り立つ．したがって

$$\vec{p}=\frac{n\vec{a}+m\vec{b}}{m+n}. \quad ■$$

［注］ 1° $\vec{a}$，$\vec{b}$ を，$\vec{a}=(x_1,\ y_1)$，$\vec{b}=(x_2,\ y_2)$ と成分表示すれば，$\vec{p}$ は，$\left(\dfrac{nx_1+mx_2}{m+n},\ \dfrac{ny_1+my_2}{m+n}\right)$ と成分表示できる．これは，座標平面上の2点 $A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$ を結ぶ線分ABを $m:n$ に内分する点の座標にほかならない．

2° 上で証明した結果は公式として覚えておいてよいものであるが，「丸暗記」だと，m と n の入る位置を，まちがえやすい．

B.102

ベクトルを用いて，四角形 ABCD についての 2 つの条件

(i)　1組の対辺 AB，DC が平行で長さが等しい

(ii)　対角線 AC，BD が互いに他を二等分する

が同値であることを証明せよ．

アプローチ (i)，(ii)はいずれも四角形 ABCD が平行四辺形になるための条件ですから，同値であることは誰でも知っているはずですが，ベクトルを用いると，それが，とても簡単に証明できます．

解答　4 頂点 A，B，C，D の位置ベクトルをそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$ とおくと

(i) $\iff$ $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$

$\iff$ $\vec{b}-\vec{a}=\vec{c}-\vec{d}$ ……… ①

(ii) $\iff$ AC の中点と BD の中点が一致

$\iff$ $\dfrac{\vec{a}+\vec{c}}{2}=\dfrac{\vec{b}+\vec{d}}{2}$ ……… ②

◀ $\begin{cases} AB /\!/ DC, \\ AB=DC \end{cases}$ が 1 つの式で表される．

となる．ここで，①，②はいずれも

$\vec{a}+\vec{c}=\vec{b}+\vec{d}$

と同値であるから，2 条件(i)，(ii)は同値である．■

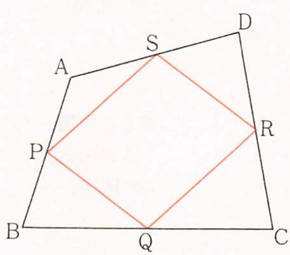
B.103

四角形 ABCD において，AB，BC，CD，DA の中点をそれぞれ P，Q，R，S とすれば，四角形 PQRS は平行四辺形である．これを，ベクトルを用いて示せ．

解答　A，B，C，D，P，Q，R，S の位置ベクトルをそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$，$\vec{p}$，$\vec{q}$，$\vec{r}$，$\vec{s}$ と表すと，

$\vec{p}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$，$\vec{q}=\dfrac{\vec{b}+\vec{c}}{2}$，$\vec{r}=\dfrac{\vec{c}+\vec{d}}{2}$，$\vec{s}=\dfrac{\vec{d}+\vec{a}}{2}$

$\therefore \quad \dfrac{\vec{p}+\vec{r}}{2}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}}{4}=\dfrac{\vec{q}+\vec{s}}{2}$



よって，2 つの対角線 PR，QS の中点は一致する．

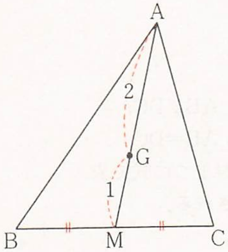
ゆえに，四角形 PQRS は平行四辺形である．■

B.104

△ABC の重心を G とおくと，任意の点 O に対し，

$\overrightarrow{OG}=\dfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)$ が成り立つ．これを証明せよ．

アプローチ 三角形の重心は，「3本の中線の交点」と定義されますが，「中線を 2：1 に内分する点」と特徴づけることもできます．上の公式を証明するには，後者を利用するのが簡単です．



解答 線分 BC の中点を M とすれば，G は，線分 AM を 2：1 に内分する点である．したがって

$$\begin{cases}\overrightarrow{OM}=\dfrac{\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{2} & \cdots\cdots\cdots ① \\ \overrightarrow{OG}=\dfrac{1\cdot\overrightarrow{OA}+2\cdot\overrightarrow{OM}}{2+1}=\dfrac{\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OM}}{3} & \cdots\cdots\cdots ②\end{cases}$$

①を用いて②から $\overrightarrow{OM}$ を消去すれば

$$\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}).$$ ■

B.105

△ABC の辺 BC，CA，AB を 2：3 に内分する点をそれぞれ D，E，F とすると，△ABC，△DEF の重心は一致する．これをベクトルを用いて示せ．

解答 A，B，C，D，E，F の位置ベクトルをそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$，$\vec{e}$，$\vec{f}$ とすると，仮定より

分点の位置ベクトルの公式 ☞B.101

$$\vec{d}=\frac{1}{5}(3\vec{b}+2\vec{c}),\quad \vec{e}=\frac{1}{5}(3\vec{c}+2\vec{a}),$$
$$\vec{f}=\frac{1}{5}(3\vec{a}+2\vec{b}).$$

△ABC，△DEF の重心をそれぞれ $G(\vec{g})$，$G'(\vec{g'})$ とおけば，

重心の位置ベクトルの公式 ☞B.104

$$\begin{aligned}\vec{g'}&=\frac{\vec{d}+\vec{e}+\vec{f}}{3}\\ &=\frac{1}{3}\left(\frac{3\vec{b}+2\vec{c}}{5}+\frac{3\vec{c}+2\vec{a}}{5}+\frac{3\vec{a}+2\vec{b}}{5}\right)\\ &=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}=\vec{g}\end{aligned}$$

すなわち，G′ と G は一致する．■

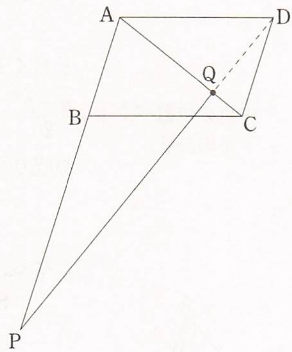
B.106

平行四辺形ABCDの辺ABの延長上に点PをBP=2ABとなるようにとり，また，対角線ACを3：1に内分する点をQとする．

(1)　$\overrightarrow{PQ}$を，$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{b}$を用いて表せ．

(2)　3点P，Q，Dは同一直線上にあることを示せ．

アプローチ　3点P，Q，Dが同一直線上にある，ということをベクトルを用いて表すにはどのようにすればよいでしょうか．3点のうち2点，たとえばPとDを通る直線は(ただ一つ)存在するので，その直線上に残りの1点がのっている，ということをベクトルを使って表します．



解答　(1)

$$\begin{cases} \overrightarrow{AP}=3\vec{a} \\ \overrightarrow{AQ}=\dfrac{3}{4}\overrightarrow{AC}=\dfrac{3}{4}(\vec{a}+\vec{b}) \end{cases}$$

$$\therefore\quad \overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{AQ}-\overrightarrow{AP}$$

$$= -\frac{9}{4}\vec{a}+\frac{3}{4}\vec{b}$$

(2)　同様にして，

$$\overrightarrow{PD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AP}$$

$$=-3\vec{a}+\vec{b}$$

となるから，これと(1)の結果より

$$\overrightarrow{PQ}=\frac{3}{4}\overrightarrow{PD}$$

を得る．

したがって，3点P，Q，Dは同一直線上にある．■

◀P，Q，Dが同一直線上にあることを示すには，この他 $\overrightarrow{PQ}=k\overrightarrow{QD}$，$\overrightarrow{PD}=l\overrightarrow{QD}$ などを示してもよい．

B.107

平面上に△ABCが与えられている．この平面上の点Pに対して，APの中点をQ，BQの中点をR，CRの中点をSとする．このとき，S=P となるような点Pがただ1つ存在することを証明せよ．

アプローチ 図形の上だけで解決しようとするとたいへんです．位置ベクトルを利用して，条件"S=P"を，Pの位置ベクトルについての方程式で表し，この方程式がただ1つの解をもつことを証明すればよいわけです．

解答 A, B, C, P, Q, R, Sの位置ベクトルをそれぞれ

$$\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c},\ \vec{p},\ \vec{q},\ \vec{r},\ \vec{s}$$

とおくと，Q, R, Sの定義から，

中点の位置ベクトルの公式．

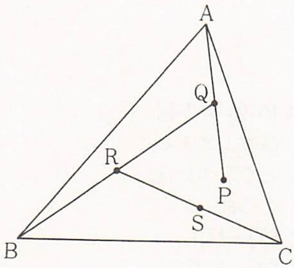
$$\frac{\vec{a}+\vec{p}}{2}=\vec{q},\quad \frac{\vec{b}+\vec{q}}{2}=\vec{r},\quad \frac{\vec{c}+\vec{r}}{2}=\vec{s}$$

が成り立つはずである．これより，$\vec{s}$ を $\vec{p}$ で表すと，

$$\vec{s}=\frac{\vec{c}}{2}+\frac{\vec{b}}{4}+\frac{\vec{a}}{8}+\frac{\vec{p}}{8}$$

となる．したがって，

$$\begin{aligned} \mathrm{S}=\mathrm{P} &\iff \vec{s}=\vec{p} \\ &\iff \frac{\vec{c}}{2}+\frac{\vec{b}}{4}+\frac{\vec{a}}{8}+\frac{\vec{p}}{8}=\vec{p} \\ &\iff \vec{p}=\frac{1}{7}(\vec{a}+2\vec{b}+4\vec{c}) \end{aligned}$$



ゆえに，S=P となる点Pは，位置ベクトルが $\frac{1}{7}(\vec{a}+2\vec{b}+4\vec{c})$ で与えられる点として，ただ1つ存在する．∎

［注］ 三角形ABCの頂点A, B, Cの位置ベクトルを $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ とおくと，一般に，$\boldsymbol{\alpha+\beta+\gamma=1}$，$\boldsymbol{\alpha>0}$，$\boldsymbol{\beta>0}$，$\boldsymbol{\gamma>0}$ となる実数 α, β, γ に対し

$$\vec{p}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}$$

を位置ベクトルにもつ点Pは，△ABCの内部にある．

逆に，△ABCの内部の点Pの位置ベクトルは上の形に一通りに表される．詳しくは ☞B.108 研究

B.108

△ABC の内部の点Pについて

$$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{9}(2\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}+4\overrightarrow{OC}) \quad \cdots\cdots\cdots \quad (*)$$

が成り立っている．ただし，Oは任意の定点である．

(1)　辺BC を 4：3 に内分する点をDとしたとき，点P は線分 AD 上にあることを示せ．

(2)　△PBC，△PCA，△PAB の面積比を求めよ．

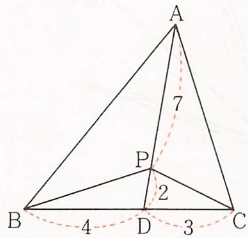
解答　(1)　$\overrightarrow{OD}=\frac{1}{7}(3\overrightarrow{OB}+4\overrightarrow{OC})$

∴　$7\overrightarrow{OD}=3\overrightarrow{OB}+4\overrightarrow{OC}$

である．これと(＊)から

$$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{9}(2\overrightarrow{OA}+7\overrightarrow{OD})$$

となる．ゆえに，Pは線分 AD を 7：2 に内分する点である．■



(2)　　△PBC：△ABC＝PD：AD＝2：9

∴　$\triangle PBC=\frac{2}{9}\triangle ABC \quad \cdots\cdots\cdots \quad ①$

また，

△PAB：△PCA＝BD：DC＝4：3 ……… ②

①より

$\triangle PAB+\triangle PCA=\frac{7}{9}\triangle ABC \quad \cdots\cdots\cdots \quad ①'$

であるから，①′と②より

$\triangle PAB=\frac{4}{9}\triangle ABC,\ \triangle PCA=\frac{3}{9}\triangle ABC \quad \cdots\cdots \quad ③$

①，③より

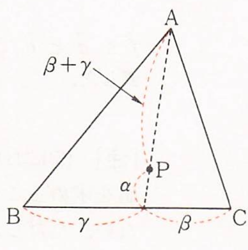
△PBC：△PCA：△PAB＝**2：3：4**

研究　(＊)をAを始点として書きかえると，

$9\overrightarrow{AP}=3\overrightarrow{AB}+4\overrightarrow{AC}$ となる．これが，

$$9\overrightarrow{AP}=7\cdot\left(\frac{3}{7}\overrightarrow{AB}+\frac{4}{7}\overrightarrow{AC}\right)$$

となることを考慮すれば点Dを考えたわけがわかるだろう．なお，$\alpha+\beta+\gamma=1$ となる正数 α，β，γ に対し，$\overrightarrow{OP}=\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}+\gamma\overrightarrow{OC}$ となる点Pは右図に示される位置にある．



B.109

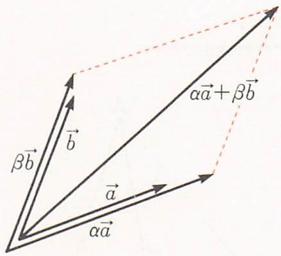
$\vec{a}=(2,\ 1)$, $b=(3,\ 2)$ とするとき，次のおのおののベクトルを，$\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}$ (α, β：実数) の形で表せ．

(1) $\vec{e_1}=(1,\ 0)$　(2) $\vec{e_2}=(0,\ 1)$　(3) $\vec{f}=(-2,\ 3)$

アプローチ　$\vec{a}$, $\vec{b}$ が与えられたときそれぞれの実数倍の和つまり $\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}$ (α, β：実数) という表現を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の**線型結合**といいます．平面上のベクトルを xy 平面の**基本ベクトル** $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$ の線型結合で表すことは

$$(-2,\ 3)=-2\vec{e_1}+3\vec{e_2}$$

のように何でもありませんが，本問は，$\vec{a}$, $\vec{b}$ として $\vec{a}=(2,\ 1)$, $\vec{b}=(3,\ 2)$ ととった場合です．



解答　**(1)**　$\vec{e_1}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}$ とおく．この両辺を成分表示すると

$$(1,\ 0)=\alpha(2,\ 1)+\beta(3,\ 2)$$
$$\therefore\ (1,\ 0)=(2\alpha+3\beta,\ \alpha+2\beta)$$

となる．したがって

$$\begin{cases}2\alpha+3\beta=1\\ \alpha+2\beta=0\end{cases}\qquad\therefore\ \alpha=2,\ \beta=-1.$$

ゆえに，　$\vec{e_1}=\mathbf{2\vec{a}-\vec{b}}.$

(2)　同様に

$$\begin{cases}2\alpha+3\beta=0\\ \alpha+2\beta=1\end{cases}$$

より

$$\alpha=-3,\ \beta=2.$$

ゆえに，　$\vec{e_2}=\mathbf{-3\vec{a}+2\vec{b}}.$

(3)　$\vec{f}=-2\vec{e_1}+3\vec{e_2}$　　………　(＊)

　まず，$\vec{f}$ と $\vec{e_1}$ と $\vec{e_2}$ で表した．

であるから，これに(1)，(2)の結果を代入すれば，

$$\vec{f}=-2(2\vec{a}-\vec{b})+3(-3\vec{a}+2\vec{b})$$

$$\therefore\ \vec{f}=\mathbf{-13\vec{a}+8\vec{b}}.$$

　$\vec{f}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ で表した．

［注］　(3)においても，(1)，(2)と同様，$\vec{f}=x\vec{a}+y\vec{b}$ において，x, y の値を求めることができるが，(1)，(2)の結果が利用できることに注目したい．ただし，これ以外に，$\vec{f}$ の表し方がないことを主張するには，$\vec{a}$, $\vec{b}$ の線型独立性をいわねばならない．(☞ B.110)

B.110

$\vec{a}=(2,\ 1)$, $\vec{b}=(3,\ 2)$, $\vec{0}=(0,\ 0)$ とする.

(1)　$\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}=\vec{0}$ なら, $\alpha=\beta=0$ であることを示せ.

(2)　任意のベクトル $\vec{v}$ を $\vec{v}=x\vec{a}+y\vec{b}$ と表す表し方は一通りしかないことを示せ.

解答　**(1)**　$\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}=\vec{0}$ とおく. これを成分で表すと

$$\alpha(2,\ 1)+\beta(3,\ 2)=(0,\ 0)$$

$$\therefore\quad (2\alpha+3\beta,\ \alpha+2\beta)=(0,\ 0)$$

となる. したがって

$$\begin{cases} 2\alpha+3\beta=0 & \cdots\cdots\cdots ① \\ \alpha+2\beta=0 & \cdots\cdots\cdots ② \end{cases}$$

◀成分どうしを比較した.

が成り立つ.

この①と②から, ①×2−②×3, ②×2−① により

$$\alpha=0,\ \beta=0$$

が導かれる. ■

(2)　ベクトルが $\vec{v}$ が

$\vec{v}=x\vec{a}+y\vec{b}$ とも $\vec{v}=x'\vec{a}+y'\vec{b}$

とも表せたとすると

$$x\vec{a}+y\vec{b}=x'\vec{a}+y'\vec{b}$$

$$\therefore\quad (x-x')\vec{a}+(y-y')\vec{b}=\vec{0}$$

となる. したがって, (1)で示したことから,

$$x-x'=y-y'=0$$

$$\therefore\quad x=x',\ y=y'$$

でなければならない.

ゆえに, $\vec{v}$ の表し方は1通りしかない. ■

[注]　ここで証明したことは,「$\vec{a}=(2,\ 1)$ と $\vec{b}=(3,\ 2)$ が**線型独立**である」ということである.

一般に, $\vec{a}$ と $\vec{b}$ が本問のように, **互いに平行でないベクトル**であるとき

$$x\vec{a}+y\vec{b}=x'\vec{a}+y'\vec{b} \iff \begin{cases} x=x' \\ y=y' \end{cases}$$

が成り立つ. つまり, $\vec{a}$ と $\vec{b}$ が平行でなければ, $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の**線型結合による表現はただ1通り**しかない.

B.111

△ABC において線分 AB を 2：1 に内分する点をNとし，線分 AC を 3：2 に内分する点を M とする．また，2 直線 BM，CN の交点をPとし，直線 AP と辺 BC との交点をQとする．

(1)　$\overrightarrow{AP}$ を $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AC}$ で表せ．

(2)　$\overrightarrow{AQ}$ を $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AC}$ で表せ．

(3)　BQ：QC を求めよ．

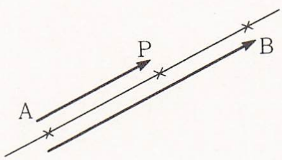
アプローチ　$\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AC}$ は平行でないので，この平面上のすべてのベクトルは

$$x\,\overrightarrow{AB}+y\,\overrightarrow{AC}\qquad (x,\ y：実数)$$

の形で表せるはずですから，(1)，(2)は，$\overrightarrow{AP}$，$\overrightarrow{AQ}$ について，この係数 x，y を決定せよ，ということです．しかし，たとえば(1)において

"$\overrightarrow{AP}=x\,\overrightarrow{AB}+y\,\overrightarrow{AC}$ とおくと，……"

と始めても，議論はスムーズに展開しません．"Pが，2 直線 BM，CN の交点である" という仮定を活用するために，まず大切なのは，この条件を "Pが直線 BM 上にある"，"Pが直線 CN 上にある" の 2 つに分解し，それぞれを次の基本事項に従って，ベクトルを用いて表現してやることです．



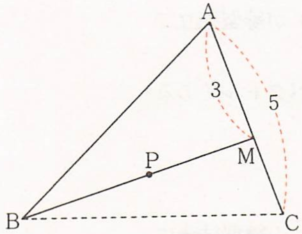
[定理]　異なる 2 点 A，B に対し，
点Pが直線 AB 上にある．
$\iff$ $\overrightarrow{AP}=s\,\overrightarrow{AB}$ ……(＊)　(s：実数)
と表せる．

なお，ベクトルの等式(＊)は，任意の点Oを用いて

$$\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}=s(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})$$

$$\therefore\quad \overrightarrow{OP}=(1-s)\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{OB}$$

と表すこともできる．



解答　(1)　Pが BM 上にあることから，

$$\overrightarrow{AP}=(1-s)\overrightarrow{AB}+s\overrightarrow{AM}$$

$$\therefore\quad \overrightarrow{AP}=(1-s)\overrightarrow{AB}+\frac{3}{5}s\overrightarrow{AC}\qquad ……… ①$$

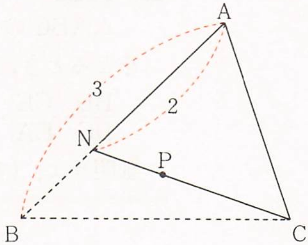
と表せる．

同様に，P が CN 上にあることから，

$$\overrightarrow{AP}=(1-t)\overrightarrow{AC}+t\overrightarrow{AN}$$

$$\therefore\quad \overrightarrow{AP}=\frac{2}{3}t\overrightarrow{AB}+(1-t)\overrightarrow{AC}\quad\cdots\cdots\cdots\ ②$$

と表せる．



同一のベクトル $\overrightarrow{AP}$ が，$\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AC}$ を用いて①，②と見かけ上 2 通りに表されたが，$\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AC}$ は，どちらも $\vec{0}$ でなく平行でもないから，2 つの表現は一致しなければならない．

$$\therefore\quad \begin{cases} 1-s=\dfrac{2}{3}t \\ \dfrac{3}{5}s=1-t \end{cases}$$

この連立方程式から，$s=\dfrac{5}{9}$ を得る．この結果を①に代入すれば，

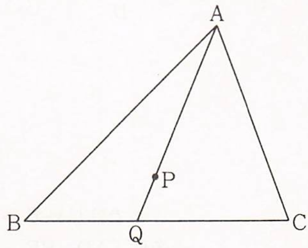
◁ $t=\dfrac{2}{3}$

$$\mathbf{\overrightarrow{AP}=\frac{4}{9}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}.}$$

(2)　Q は直線 AP 上にあるので

$$\overrightarrow{AQ}=u\,\overrightarrow{AP}$$

$$\therefore\quad \overrightarrow{AQ}=\frac{4u}{9}\overrightarrow{AB}+\frac{u}{3}\overrightarrow{AC}\quad\cdots\cdots\cdots\ ③$$



と表せる．一方，Q が直線 BC 上の点であることを考えると，③の右辺の係数の和は 1 である．すなわち，

$$\frac{4u}{9}+\frac{u}{3}=1\qquad\therefore\quad u=\frac{9}{7}.$$

これを③に代入して

$$\mathbf{\overrightarrow{AQ}=\frac{4}{7}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{7}\overrightarrow{AC}.}$$

◁ $\overrightarrow{AQ}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}$ なら，$\alpha+\beta=1$ であることを用いた．
$\overrightarrow{AQ}=(1-v)\overrightarrow{AB}+v\overrightarrow{AC}$ と③から，(1)でやったように連立方程式をたててもよい．

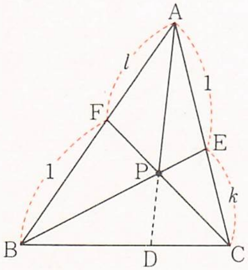
(3)　(2)で得た結果より

$$\mathrm{BQ}:\mathrm{QC}=\mathbf{3:4}.$$

B.112

△ABC の辺 BC，CA，AB 上にそれぞれ 3 点 D，E，F をとるとき，AD，BE，CF が 1 点で交わるならば，

$\dfrac{\mathrm{BD}}{\mathrm{DC}}\cdot\dfrac{\mathrm{CE}}{\mathrm{EA}}\cdot\dfrac{\mathrm{AF}}{\mathrm{FB}}=1$ が成り立つことをベクトルを用いて証明せよ．(チェーバの定理)



解答　CE : EA $=k:1$, AF : FB $=l:1$ とおいて，BD : DC $=1:kl$ となることを示せばよい．

BE，CF の交点を P とし，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{c}$ とおく．すると

$$\begin{cases}\overrightarrow{\mathrm{AP}}=x\overrightarrow{\mathrm{AB}}+(1-x)\overrightarrow{\mathrm{AE}}=x\vec{b}+\dfrac{1-x}{k+1}\vec{c}\\[2mm] \overrightarrow{\mathrm{AP}}=y\overrightarrow{\mathrm{AF}}+(1-y)\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\dfrac{ly}{l+1}\vec{b}+(1-y)\vec{c}\end{cases}$$

となる x，y が存在する．ここで $\vec{b}$ と $\vec{c}$ とは平行でないので，$\vec{b}$，$\vec{c}$ の係数を比較して

$$x=\frac{l}{l+1}y \quad \text{かつ} \quad \frac{1}{k+1}(1-x)=1-y$$

したがって　$y=\dfrac{k(l+1)}{kl+k+1}$ であり，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ は

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{kl}{kl+k+1}\vec{b}+\frac{1}{kl+k+1}\vec{c}$$

と表せる．D は AP の延長上にあるので

ここではじめて条件「AD，BE，CF は 1 点で交わる」を用いた．▶

$$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\alpha\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\alpha\left(\frac{kl}{kl+k+1}\vec{b}+\frac{1}{kl+k+1}\vec{c}\right)$$

と表せるが，一方 D は BC 上の点だから

p.45 の傍注 ▶

$$\alpha\left(\frac{kl}{kl+k+1}+\frac{1}{kl+k+1}\right)=1$$

$$\therefore\quad \alpha=\frac{kl+k+1}{kl+1}.$$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\dfrac{1}{kl+1}(kl\vec{b}+\vec{c})$.

$\therefore$　BD : DC $=1:kl$. ■

［注］　平面幾何の手法による証明は「大学への数学 A ニューアプローチ」B.303 を見よ．また，本問の逆命題（前掲書 B.304）は，三角形の重心や内心，垂心の存在定理を一般化したものとみなせる（B.121 研究 参照）．これについてもベクトルを用いて証明できます．

B.113

△ABCの辺BCの延長，CA，AB上にそれぞれ点D，E，Fをとるとき，

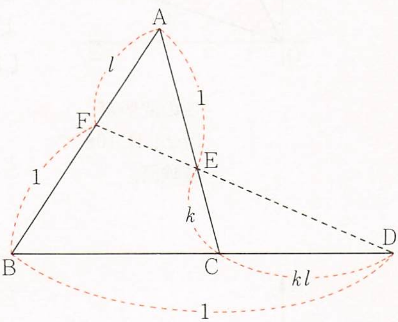
$$\frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{DC}}\cdot\frac{\mathrm{CE}}{\mathrm{EA}}\cdot\frac{\mathrm{AF}}{\mathrm{FB}}=1$$

ならば，3点D，E，Fは同一直線上にあることをベクトルを利用して示せ．(メネラオスの定理の逆)

アプローチ 前問とよく似ていますが，図の設定(点の配置)だけでなく，証明すべき命題の形式が逆になっていることにも注意して下さい．

解答 $\frac{\mathrm{CE}}{\mathrm{EA}}=k$，$\frac{\mathrm{AF}}{\mathrm{FB}}=l$ とおくと，仮定より，

$\frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{DC}}=\frac{1}{kl}$ である．これらの関係から



$$\begin{cases} \overrightarrow{\mathrm{AD}}=\dfrac{1}{1-kl}(-kl\,\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}) & \cdots ① \\ \overrightarrow{\mathrm{AE}}=\dfrac{1}{k+1}\overrightarrow{\mathrm{AC}} & \cdots ② \\ \overrightarrow{\mathrm{AF}}=\dfrac{l}{l+1}\overrightarrow{\mathrm{AB}} & \cdots ③ \end{cases}$$

となるので，②−①，③−②により

$$\overrightarrow{\mathrm{DE}}=\frac{kl}{1-kl}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{1-kl}\right)\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

$$=\frac{kl}{1-kl}\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\frac{k(l+1)}{(1-kl)(k+1)}\overrightarrow{\mathrm{AC}} \quad \cdots ④$$

$$\overrightarrow{\mathrm{EF}}=\frac{l}{l+1}\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\frac{1}{k+1}\overrightarrow{\mathrm{AC}} \quad \cdots ⑤$$

④，⑤より

$$\overrightarrow{\mathrm{DE}}=\frac{k(l+1)}{1-kl}\overrightarrow{\mathrm{EF}}.$$

したがって，3点D, E, Fは同一直線上にある． ■

［注］ 本問および本問の逆(メネラオスの定理)の，平面幾何の手法による証明は「大学への数学Aニューアプローチ」B.307，B.308を見よ．逆命題に関しても，ベクトルを用いた証明を試みて下さい．

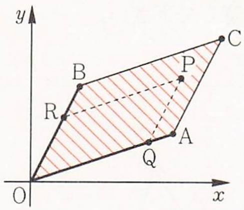
B.114

平面上に3点 O(0, 0), A(3, 1), B(1, 2) があり，点Pは，$\overrightarrow{OP}=\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}$ (α, β は実数) で与えられている．α, β が次の関係を満たしながら変わる3つの場合の各々について，Pの描く図形を図示せよ．

(1)　$0\leqq\alpha\leqq1$, $0\leqq\beta\leqq1$

(2)　$\alpha+\beta<1$, $\alpha>0$, $\beta>0$

(3)　$\beta=-3\alpha+2$



解答　**(1)**　$\overrightarrow{OQ}=\alpha\overrightarrow{OA}$ なる点Qは線分OA上を，$\overrightarrow{OR}=\beta\overrightarrow{OB}$ なる点Rは線分OB上を，それぞれ独立にくまなく動く．したがって，$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}$ なる点Rは，左図のような平行四辺形OACBの周および内部をくまなく動く．

(2)　$\alpha+\beta>0$ であるから

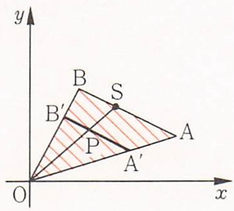
この変形がkey！B.108で経験済．

$$\overrightarrow{OP}=(\alpha+\beta)\left\{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\overrightarrow{OA}+\frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{OB}\right\}$$

と変形し，

$$\overrightarrow{OS}=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\overrightarrow{OA}+\frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{OB}\quad\cdots\cdots\cdots ①$$

とおくと，
$$\overrightarrow{OP}=(\alpha+\beta)\overrightarrow{OS}\quad\cdots\cdots\cdots ②$$
と表せる．



いま，k を $0<k<1$ なる定数として，α, β を $\alpha+\beta=k$ なる条件の下で変化させると，①，すなわち，

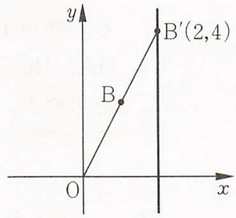
$$\overrightarrow{OS}=\frac{\alpha}{k}\overrightarrow{OA}+\left(1-\frac{\alpha}{k}\right)\overrightarrow{OB}$$

で定まる点Sは線分AB(両端を除く)上をくまなく動く．

②より，Pは点Sを，Oを中心としてk倍に拡大した位置にあるから，Sの描く線分ABをOを中心としてk倍に拡大した線分A′B′を描く．したがってkを $0<k<1$ の範囲で変化させたときに線分A′B′が描く範囲，すなわち△OABの内部が，Pの存在範囲である．

(3)　$\beta=-3\alpha+2$ だから

$$\overrightarrow{OP}=\alpha\overrightarrow{OA}+(-3\alpha+2)\overrightarrow{OB}$$
$$=\alpha(\overrightarrow{OA}-3\overrightarrow{OB})+2\overrightarrow{OB}$$



となる．したがって，α が実数値をとって変化するとき，点Pは，$\overrightarrow{OB'}=2\overrightarrow{OB}$ なる点B′を通り，ベクトル $\overrightarrow{OA}-3\overrightarrow{OB}$ に平行な直線を描く．

$$\overrightarrow{OA}-3\overrightarrow{OB}=(3,\ 1)-(3,\ 6)=(0,\ -5)$$

であるから，求める図形は，点B′(2, 4) を通りベクトル(0, −5) に平行な直線である．

[注]　以上の解答は，$\overrightarrow{OP}=\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}$　という表現——$\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ の **線型結合** ——の図形的意味を利用したものであるが，本問では，$\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ の成分が与えられているので次のように，形式的な計算だけで答に到達することもできる．

別解　点Pの座標を $(x,\ y)$ とおけば，

$\overrightarrow{OP}=\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}$ は

$(x,\ y)=\alpha(3,\ 1)+\beta(1,\ 2)=(3\alpha+\beta,\ \alpha+2\beta)$

$$\therefore\ \begin{cases} x=3\alpha+\beta \\ y=\alpha+2\beta \end{cases}\quad\cdots\cdots\cdots\quad (*)$$

と書きなおせる．これを α, β について解くと，次式を得る．

$$\begin{cases} \alpha=(2x-y)/5 \\ \beta=(-x+3y)/5 \end{cases}\quad\cdots\cdots\cdots\quad (**)$$

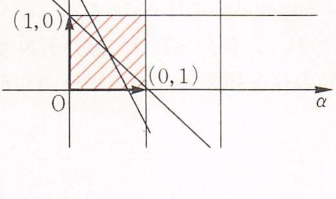
◀この変形が重要．

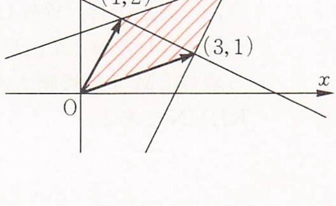
(1)　$(*)$を，$0\leqq\alpha\leqq1$，$0\leqq\beta\leqq1$ に代入して

$$\begin{cases} 0\leqq(2x-y)/5\leqq1 \\ 0\leqq(-x+3y)/5\leqq1 \end{cases}\quad\therefore\ \begin{cases} 0\leqq 2x-y\leqq5 \\ 0\leqq -x+3y\leqq5 \end{cases}$$

が，求める点P$(x,\ y)$ の存在範囲である．(2)と(3)も同様である．

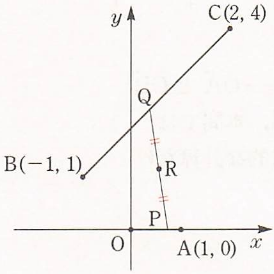
研究　旧課程に入っていた「1次変換」のことばでいえば，$(*)$は，点$(\alpha,\ \beta)$ を点$(x,\ y)$ に移す変換が，行列$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$の表す1次変換であるということである．





B.115

xy 平面上，O(0, 0)，A(1, 0)，B(−1, 1)，C(2, 4) とする．動点P，Qがそれぞれ線分（両端の点を含むとする）OA，BC 上を動くとき，線分PQの中点Rの存在する範囲を求めよ．



解答 $\begin{cases} \overrightarrow{OP}=t\,\overrightarrow{OA} & 0\leqq t\leqq 1 \\ \overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OB}+s\,\overrightarrow{BC} & 0\leqq s\leqq 1 \end{cases}$

とおける．よって，

$$\overrightarrow{OR}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ})$$
$$=t\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}\right)+s\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\right)+\frac{1}{2}\overrightarrow{OB} \quad\cdots\cdots\cdots (*)$$

である．

さて，(∗)の右辺の最初の2項に注目して

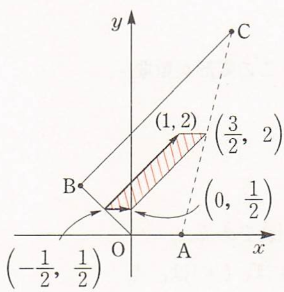
$$\overrightarrow{OS}=t\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}\right)+s\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\right)$$

とおくと，点Sは，t，s が変化するにつれて

$$\overrightarrow{OD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}=\left(\frac{1}{2},\ 0\right),\ \overrightarrow{OE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=\left(\frac{3}{2},\ \frac{3}{2}\right)$$

で定められるOD，OEを2辺とする平行四辺形の周および内部を動く．

したがって，$\overrightarrow{OR}=\overrightarrow{OS}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$ を満たす点Rの存在範囲は，この平行四辺形を $\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$ だけ平行移動したもので，これを図示すると左図のようになる．

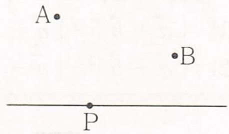


［注］ 本問は，ベクトルを用いないで図形的に解くこともできる．

別解 Pを線分OA上に固定し，Qだけ動かすと，点Rは，線分PBの中点Sと線分PCの中点Tを結ぶ線分を描く．Pが線分OA上を動くと，点Sは線分OBの中点Kと線分ABの中点Lを結ぶ線分を描き，一方点Tは，線分OCの中点Nと線分ACの中点Mを結ぶ線分を描く．したがって，Pを動かすにつれて，線分STは，線分KNから線分LMまで移動する．よってRの存在範囲は，この平行四辺形KLMNである．

B.116

平面上に，右図のように，2つの定点A，Bと定直線 l がある．動点Pが l 上を動くときベクトル $2\overrightarrow{PA}+3\overrightarrow{PB}$ の大きさを最小にする点Pの位置を求めよ．



アプローチ $2\overrightarrow{PA}+3\overrightarrow{PB}$ の図形的意味が解明できればよいのですが，そのためには，位置ベクトルを利用して式を単純化するのが良いでしょう．

解答 A，B，Pの位置ベクトルをそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{p}$ とすると，

$$\begin{aligned}2\overrightarrow{PA}+3\overrightarrow{PB}&=2(\vec{a}-\vec{p})+3(\vec{b}-\vec{p})\\&=(2\vec{a}+3\vec{b})-5\vec{p}\\&=-5\left(\vec{p}-\frac{2\vec{a}+3\vec{b}}{5}\right)\end{aligned}$$

と表せる．

したがって，位置ベクトルが $\dfrac{2\vec{a}+3\vec{b}}{5}$ で与えられる点，すなわち線分ABを 3：2 に内分する点をCとすれば，

$$2\overrightarrow{PA}+3\overrightarrow{PB}=-5\overrightarrow{CP}$$

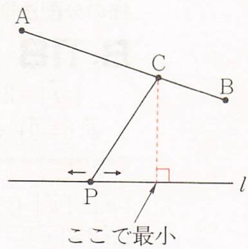
となる．したがって，$|2\overrightarrow{PA}+3\overrightarrow{PB}|$ を最小にするには，$|\overrightarrow{CP}|$ を最小にすればよい．

しかるに $|\overrightarrow{CP}|$ が最小となるのは，Pが，

$$CP\perp l$$

なる位置に来るときである．

よって，求める点Pの位置は，**線分ABを 3：2 に内分する点Cから l に下した垂線の足** である．



［注］ 位置ベクトルを用いなくとも，

$$\begin{aligned}2\overrightarrow{PA}+3\overrightarrow{PB}&=(2+3)\left(\frac{2}{5}\overrightarrow{PA}+\frac{3}{5}\overrightarrow{PB}\right)\\&=5\overrightarrow{PC}\end{aligned}$$

と変形することによって同様の議論ができる．

B.117

任意の $\vec{a}$, $\vec{b}$ に対し，次の各等式が成立することを示せ．

(1)　$|\vec{a}+\vec{b}|^2+|\vec{a}-\vec{b}|^2=2(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2)$

(2)　$|\vec{a}+\vec{b}|^2-|\vec{a}-\vec{b}|^2=4\,\vec{a}\cdot\vec{b}$

解答　$|\vec{a}+\vec{b}|^2=(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})$

分配法則 ▶ $=\vec{a}\cdot(\vec{a}+\vec{b})+\vec{b}\cdot(\vec{a}+\vec{b})$

分配法則 ▶ $=\vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{b}$

$=|\vec{a}|^2+2\,\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$ ……… ①

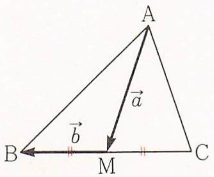
同様に，

$|\vec{a}-\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2-2\,\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$ ……… ②

①＋② から(1)の等式，①－② からは(2)の等式が得られる．∎

［注］　△ABC の辺 BC の中点を M とし，$\overrightarrow{AM}=\vec{a}$, $\overrightarrow{MB}=\vec{b}$ とおくと

$\overrightarrow{MC}=-\vec{b}$，$\overrightarrow{AB}=\vec{a}+\vec{b}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{a}-\vec{b}$



となるので，(1)は $AB^2+AC^2=2(AM^2+BM^2)$ という，有名な定理（**Pappos の中線定理**）を意味する．

とはいえ，ここで証明された結果は，ベクトル特有の記号を無視すれば，通常の「展開公式」

$$\begin{cases}(a+b)^2+(a-b)^2=2(a^2+b^2)\\(a+b)^2-(a-b)^2=4ab\end{cases}$$

と変わらない．ベクトルの内積と加法に関しても，通常の積や和と同様の分配法則，交換法則が成立するからである．

B.118

$|\vec{a}|=2|\vec{b}|=|\vec{a}+3\vec{b}|$ ……… ① を満たすベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ $(\neq\vec{0})$ がある．$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角 θ の余弦の値を求めよ．

$|\vec{u}|=|\vec{v}|$ は $|\vec{u}|^2=|\vec{v}|^2$ と同値． ▶ **解答**　①は，$\begin{cases}|\vec{a}|=2|\vec{b}| & \cdots\cdots\cdots ②\\ |\vec{a}|^2=|\vec{a}+3\vec{b}|^2 & \cdots\cdots\cdots ③\end{cases}$

と同値である．③を計算すると

$$|\vec{a}|^2=|\vec{a}|^2+6(\vec{a}\cdot\vec{b})+9|\vec{b}|^2$$

$$\therefore\quad (\vec{a}\cdot\vec{b})=-\frac{3}{2}|\vec{b}|^2$$

$\vec{b}\neq 0$ より $|\vec{b}|\neq 0$ ▶ $\therefore\quad |\vec{a}|\cos\theta=-\dfrac{3}{2}|\vec{b}|$ ……… ③′

となる．②，③′より　　$\cos\theta=-\dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}$

B.119

座標平面上において，

(1) 直線 $ax+by+c=0$ は，その係数 a，b を成分とするベクトル $\vec{n}=(a,\ b)$ と直交することをベクトルの内積を用いて示せ．

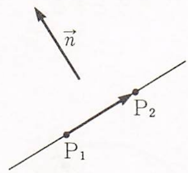
(2) 2 直線 l_1：$a_1x+b_1y+c_1=0$，l_2：$a_2x+b_2y+c_2=0$ が垂直であるための必要十分条件を(1)を利用して求めよ．

解答 (1) $P_1(x_1,\ y_1)$，$P_2(x_2,\ y_2)$ を $ax+by+c=0$ 上の任意の 2 点とすると，

$$\begin{cases} ax_1+by_1+c=0 \\ ax_2+by_2+c=0 \end{cases}$$

この 2 式を差し引いて，

$$a(x_2-x_1)+b(y_2-y_1)=0. \quad \cdots\cdots\cdots \text{①}$$



ところが，

$$\overrightarrow{P_1P_2}=(x_2-x_1,\ y_2-y_1),\quad \vec{n}=(a,\ b)$$

であるから，①は

$$\overrightarrow{P_1P_2}\cdot\vec{n}=0$$

であることを示している．

つまり，直線 $ax+by+c=0$ とベクトル $\vec{n}$ とは直交する．■

(2) (1)より，2 直線

$$\left.\begin{aligned} l_1&：a_1x+b_1y+c_1=0 \\ l_2&：a_2x+b_2y+c_2=0 \end{aligned}\right\}\text{が垂直である}$$

ことは，それぞれの法線ベクトル

$$\vec{n}_1=(a_1,\ b_1),\quad \vec{n}_2=(a_2,\ b_2)\ \text{が直交する}$$

ことと同値である．よって，

$$\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2=0$$

$$\therefore\quad a_1a_2+b_1b_2=0$$

が求める条件である．

◀ l_1，l_2 の傾きを利用して垂直条件を求めようとすると，$b_1b_2=0$ の場合を別扱いせねばならない．

◀ 結果はすでに数学IIでも学んでいる．

[注] 上と同じ論法を 3 次元空間内の平面に適用すると，

「空間内の平面 $ax+by+cz+d=0$ はベクトル $\vec{n}=(a,\ b,\ c)$ と直交する」

という応用上重要な定理が得られる．

B.120

△ABC の外心をOとして $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OH}$ を満たす点Hをとる．次のことを示せ．

(1) Hは，△ABC の各頂点から対辺にひいた垂線の交点(垂心)である．

(2) △ABC の重心をGとすれば，Gは線分 OH を 1：2 に内分する．

解答 (1) まず，$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$ は平面 ABC に平行であるから，$\overrightarrow{OH}$ もこの平面に平行であり，したがってHはこの平面上にある．

AH⊥BC を示そうとする．▶

$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とすると，

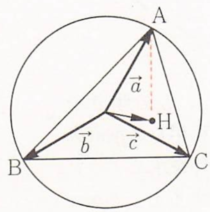
$$\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OA}$$
$$=(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})-\vec{a}=\vec{c}+\vec{b}$$

また， $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}=\vec{c}-\vec{b}$

$$\therefore\quad \overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}=(\vec{c}+\vec{b})\cdot(\vec{c}-\vec{b})$$
$$=|\vec{c}|^2-|\vec{b}|^2=0$$

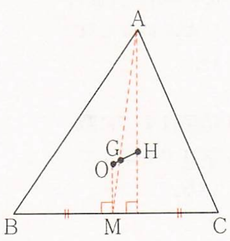
[∵ $|\vec{c}|=|\vec{b}|$=(外接円の半径)]

∴ A=H または AH⊥BC



ゆえに，点Hは，Aから対辺 BC にひいた垂線上にある．

同様に，点Hは，B，C から対辺にひいた垂線上にもある．よって，Hは △ABC の垂心である．■



(2) 重心Gの位置ベクトルについての性質から，

$$\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}) \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

が成り立つ．これと

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OH} \quad \cdots\cdots\cdots ②$$

より，$3\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{OH}$.

ゆえに，点Gは線分 OH を 1：2 に内分する．■

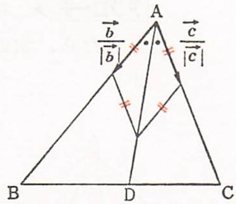
[注] ①は，任意の点Oについて成りたつが，②は，△ABC の外心Oについてしか成りたたない． なお，(1)を証明するのに，

“$\overrightarrow{OH}=\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}+\gamma\overrightarrow{OC}$ ……(＊) とおいて，$\alpha=\beta=\gamma=1$ を導こう”と考えてもうまくいかない．$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$ は同一平面上にある(つまり線型独立でない)から，(＊)を満たす$(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$は(1，1，1)以外に，いくらでもありうるからである．

B.121

△ABC の頂角Aの二等分線と辺 BC との交点をDとするとき，$\overrightarrow{AD}$ を，$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{c}$ を用いて表せ．

アプローチ 「ひし形の対角線は頂角を二等分する」という性質を利用します．(図を参照して下さい)



解答 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$ と同方向の単位ベクトルは，それぞれ $\dfrac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$，$\dfrac{\vec{c}}{|\vec{c}|}$ となるから，$\overrightarrow{AD}$ はこれらの和 $\dfrac{\vec{b}}{|\vec{b}|}+\dfrac{\vec{c}}{|\vec{c}|}$ に平行であり，したがって，

$$\overrightarrow{AD}=k\left(\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}+\frac{\vec{c}}{|\vec{c}|}\right)$$

$$=\frac{k}{|\vec{b}|}\vec{b}+\frac{k}{|\vec{c}|}\vec{c} \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

(k はある実数)

と表せる．一方，D は辺 BC 上の点であるから，

$$\frac{k}{|\vec{b}|}+\frac{k}{|\vec{c}|}=1$$

$$\therefore \quad k=\frac{|\vec{b}||\vec{c}|}{|\vec{b}|+|\vec{c}|} \quad \cdots\cdots\cdots ②$$

◁ B.111(2)解答で同様の議論を学んだ．

である．②を①に代入して，

$$\overrightarrow{AD}=\frac{\mathbf{1}}{|\vec{\boldsymbol{b}}|+|\vec{\boldsymbol{c}}|}\{|\vec{\boldsymbol{c}}|\vec{\boldsymbol{b}}+|\vec{\boldsymbol{b}}|\vec{\boldsymbol{c}}\}$$

研究 本問は，平面幾何における次の定理

> [定理] △ABC で ∠A の二等分線と BC との交点をDとすると
>
> AB：AC＝BD：DC

の証明を，ベクトルを用いて行なったものである．平面幾何の手法による証明は「大学への数学Aニューアプローチ」B.305(1)を見て下さい．逆に，この定理を仮定すれば，分点の位置ベクトルの公式をそのまま用いることにより本問の結果を表すことが出来る．各自確認して下さい．

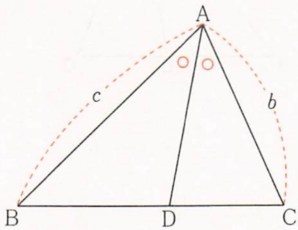
B.122

△ABC の内心を I とすると，

$$\overrightarrow{AI}=\frac{1}{a+b+c}(b\overrightarrow{AB}+c\overrightarrow{AC})$$

が成り立つことを示せ．ただし，a，b，c はそれぞれ辺 BC，CA，AB の長さである．

アプローチ 内心とは，各頂角の二等分線の交点です．角の二等分線ときたら，次の定理を思い出したいものです (前問で扱ったばかりです)．



［定理］ △ABC で ∠A の二等分線と BC との交点を D とすると
AB：AC＝BD：DC

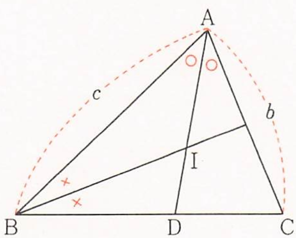
解答 ∠A の二等分線と辺 BC との交点を D とおくと，角の二等分線についての定理から，

$$\text{BD}:\text{DC}=c:b \qquad \cdots\cdots\cdots ①$$

$$\therefore\quad \text{BD}=a\times\frac{c}{c+b}=\frac{ac}{b+c}$$

再びこの定理とこの結果を用いると，

$$\begin{aligned}\text{AI}:\text{ID}&=\text{AB}:\text{BD}\\&=c:\frac{ac}{b+c}\\&=(b+c):a \qquad \cdots\cdots\cdots ②\end{aligned}$$



①と②より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AI}&=\frac{b+c}{a+b+c}\overrightarrow{AD}\\&=\frac{b+c}{a+b+c}\cdot\frac{1}{b+c}(b\overrightarrow{AB}+c\overrightarrow{AC})\\&=\frac{1}{a+b+c}(b\overrightarrow{AB}+c\overrightarrow{AC}).\ \blacksquare\end{aligned}$$

［注］ ここで証明した結果は，O を任意の点として

$$\overrightarrow{OI}-\overrightarrow{OA}=\frac{1}{a+b+c}\{b(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})+c(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})\}$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{\overrightarrow{OI}=\frac{1}{a+b+c}(a\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OB}+c\overrightarrow{OC})}$$

と書き換えられる．

B.123

△ABC で

$$(\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{BC})=(\overrightarrow{BC},\ \overrightarrow{CA})=(\overrightarrow{CA},\ \overrightarrow{AB}) \quad \cdots\cdots\cdots \quad (*)$$

が成り立つとき，△ABC はどんな三角形か．

ただし，$(\vec{a},\ \vec{b})$ は $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の内積を表す．

アプローチ 最近の教科書では，ベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ の内積を表す記号として，$\vec{a}\cdot\vec{b}$ が一般的ですが，大学以上では本文に示したような $(\vec{a},\ \vec{b})$ がはるかに一般的です．

解答 (*)は

$$\begin{cases}(\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{BC})=(\overrightarrow{BC},\ \overrightarrow{CA}) & \cdots\cdots\cdots \ ① \\ (\overrightarrow{BC},\ \overrightarrow{CA})=(\overrightarrow{CA},\ \overrightarrow{AB}) & \cdots\cdots\cdots \ ②\end{cases}$$

と同値である．

$$① \iff (\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{BC})-(\overrightarrow{CA},\ \overrightarrow{BC})=0$$

◀移項した．

$$\iff (\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CA},\ \overrightarrow{BC})=0 \quad \cdots\cdots\cdots \ ⓐ$$

◀分配法則

$$\iff (\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=0$$

◀始点をAに統一した．

$$\iff |\overrightarrow{AC}|^2-|\overrightarrow{AB}|^2=0$$

$$\iff |\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{AC}| \quad \cdots\cdots\cdots \ ①'$$

同様に，

$$② \iff |\overrightarrow{BC}|=|\overrightarrow{AB}| \quad \cdots\cdots\cdots \ ②'$$

①′かつ②′より(*)を満たす△ABC は，**正三角形** である．

［注］ 辺 BC の中点を M とすると，

$$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AM}$$

となることから，ⓐを，

$$(2\overrightarrow{AM},\ \overrightarrow{BC})=0$$

と変形し，これから，

$$AM\perp BC \qquad \therefore \qquad AB=AC$$

を初等幾何の知識を利用して導いてもよい．

また，$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{c}$ とおいて，(*)を

$$|\vec{b}|^2=|\vec{c}|^2=2(\vec{b},\ \vec{c})$$

と変形して，これを

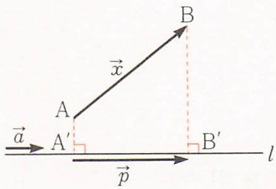
$$|\vec{b}|=|\vec{c}|,\ \cos A=\frac{1}{2}$$

と変形する手もある．

B.124

$\vec{a} \neq \vec{0}$ とし，直線 l は $\vec{a}$ に平行であるとする．$\vec{x}=\overrightarrow{AB}$ に対し A，B から l に下した垂線の足を A′，B′ とするとき，$\vec{p}=\overrightarrow{A'B'}$ を，$\vec{x}$ の l に対する**正射影**と呼ぶ．

公式　$\vec{p}=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{x}}{|\vec{a}|^2}\vec{a}$ を証明せよ．



解答　正射影 $\vec{p}$ は，$\begin{cases} \text{i）} & \vec{p} /\!/ \vec{a} \\ \text{ii）} & (\vec{x}-\vec{p}) \perp \vec{a} \end{cases}$ という条件で決定される．

i）より，$\vec{p}=k\vec{a}$（k：実数）……① とおける．

ii）は，　$\vec{a}\cdot(\vec{x}-\vec{p})=0$ ……② と同値である．

①を②に代入して，$\vec{p}$ を消去すると

$$\vec{a}\cdot(\vec{x}-k\vec{a})=0 \qquad \therefore \quad \vec{a}\cdot\vec{x}-k|\vec{a}|^2=0$$

となり，

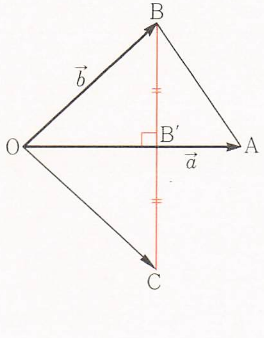
$\vec{a} \neq \vec{0}$ より $|\vec{a}| \neq 0$ だから，$k=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{x}}{|\vec{a}|^2}$ ……　③

と k の値が求められる．

③を①に代入すれば証明すべき式を得る．■

B.125

△OAB において，直線 OA に関する B の対称点を C とする．$\overrightarrow{OC}$ を，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ を用いて表せ．



解答　C が，OA に関する B の対称点であるための条件は，　i）BC の中点が OA 上にあり，かつ ii）BC⊥OA　となることである．

i）より，$\vec{b}+\overrightarrow{OC}=k\vec{a}$　……　①　とおける．

ii）は，　$\vec{a}\cdot(\overrightarrow{OC}-\vec{b})=0$……　②　と同値．

①を用い，②から $\overrightarrow{OC}$ を消去し k の値を求めると

$$\vec{a}\cdot(k\vec{a}-2\vec{b})=0$$

$$\therefore \quad k|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}=0 \qquad \therefore \quad k=\frac{2\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|^2}$$

となる．これを①に代入して

$$\overrightarrow{OC}=\frac{2\boldsymbol{\vec{a}}\cdot\boldsymbol{\vec{b}}}{|\boldsymbol{\vec{a}}|^2}\boldsymbol{\vec{a}}-\boldsymbol{\vec{b}}$$

［注］　図をじっとながめれば，本問の結果と前問で示した公式との関係は理解できよう．

B.126

$\vec{a}$, $\vec{b}$ を互いに垂直な単位ベクトルとする．任意のベクトル $\vec{x}$ に対し，　$f(\vec{x})=(\vec{a}\cdot\vec{x})\,\vec{a}$，　$g(\vec{x})=(\vec{b}\cdot\vec{x})\,\vec{b}$
とするとき，次の問いに答えよ．

(1)　$f(f(\vec{x}))=f(\vec{x})$，$g(f(\vec{x}))=\vec{0}$ を示せ．ただし，$\vec{0}$ は零ベクトルである．

(2)　$\vec{a}$，$\vec{b}$ と同一平面上にある任意のベクトル $\vec{x}$ に対し，$f(\vec{x})+g(\vec{x})=\vec{x}$ が成り立つことを示せ．

解答　(1)　$f(\vec{x})=(\vec{a}\cdot\vec{x})\,\vec{a}$

$$
\begin{aligned}
\therefore\quad f(f(\vec{x}))&=(\vec{a}\cdot f(\vec{x}))\,\vec{a}\\
&=(\vec{a}\cdot(\vec{a}\cdot\vec{x})\,\vec{a})\,\vec{a}\\
&=(\vec{a}\cdot\vec{x})(\vec{a}\cdot\vec{a})\,\vec{a}\\
&=(\vec{a}\cdot\vec{x})\,\vec{a}\quad(\because\ \vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2=1)\\
&=f(\vec{x})
\end{aligned}
$$

◀ $\vec{a}\cdot(k\vec{b})=k(\vec{a}\cdot\vec{b})$

◀ $\vec{a}$ は単位ベクトル．

また

$$
\begin{aligned}
g(f(\vec{x}))&=(\vec{b}\cdot f(\vec{x}))\,\vec{b}\\
&=(\vec{b}\cdot(\vec{a}\cdot\vec{x})\,\vec{a})\,\vec{b}\\
&=(\vec{a}\cdot\vec{x})(\vec{b}\cdot\vec{a})\,\vec{b}\\
&=0\,\vec{b}\qquad(\because\ \vec{b}\cdot\vec{a}=0)\\
&=\vec{0}\ \blacksquare
\end{aligned}
$$

◀ $\vec{a}$ と $\vec{b}$ は直交するベクトル

(2)　$\vec{x}$ が $\vec{a}$，$\vec{b}$ と同一平面上にあることから

$$\vec{x}=\alpha\,\vec{a}+\beta\,\vec{b}\qquad(\alpha,\ \beta：実数)$$

とおける．

$$
\begin{aligned}
f(\vec{x})&=(\vec{a}\cdot(\alpha\,\vec{a}+\beta\,\vec{b}))\,\vec{a}\\
&=(\alpha|\vec{a}|^2+\beta(\vec{a}\cdot\vec{b}))\,\vec{a}=\alpha\,\vec{a}
\end{aligned}
$$

◀ $|\vec{a}|=1$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

同様に，　$g(\vec{x})=\beta\,\vec{b}$

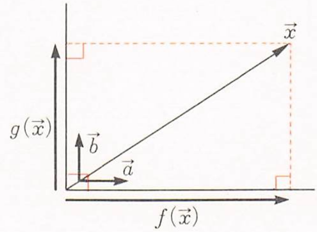
よって，　$f(\vec{x})+g(\vec{x})=\alpha\,\vec{a}+\beta\,\vec{b}=\vec{x}$　■

研究　$\vec{a}$，$\vec{b}$ が単位ベクトルであるので，$f(\vec{x})$，$g(\vec{x})$ が，それぞれ，$\vec{x}$ の，$\vec{a}$ 方向，$\vec{b}$ 方向への正射影を表す（☞B.124）．このことを考えれば，(1)，(2)が成立することがよく納得ができる．

なお，(2)を証明するには

$$\vec{y}=f(\vec{x})+g(\vec{x})-\vec{x}$$

とおいて，“$\vec{a}\cdot\vec{y}=\vec{b}\cdot\vec{y}=0$” を示し，これから $\vec{y}=\vec{0}$ ともっていく手もある．



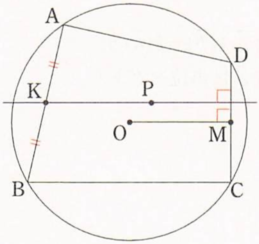
B.127

中心Oの円に四角形ABCDが内接しており，Oはどの辺の上にのっていないものとする．

(1)　辺ABの中点Kを通り，辺CDに垂直な直線のベクトル方程式を，$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$，$\overrightarrow{OD}$ を用いて求めよ．

(2)　(1)を利用して，四角形ABCDの各辺の中点を通り，隣り合わない辺に垂直な直線は，1点で交わることを示せ．

アプローチ　CDに垂直なベクトルがどのように表せるか，これに気づくことが解法の第一歩です．「1点で交わる」ことを証明するには，どの直線もある定点を通過することを示せばよいのです．



解答　(1)　直線上の任意の点をPとすると，

$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OK}+\overrightarrow{KP}$ ……… ①　である．

まず，Kが線分ABの中点であることから

$\overrightarrow{OK}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$ ……… ②

次に，KP⊥CD であり，またCDの中点をMとすると OM⊥CD であるから，KP∥OM である．

したがって，$\overrightarrow{KP}=t\overrightarrow{OM}=t\cdot\frac{1}{2}(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD})$…… ③

となる実数 t が存在する．以上①，②，③より

$$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})+\frac{t}{2}(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD})\quad (t\text{は実数})$$

「Oが辺上にない」の仮定は，ここで効く．$\overrightarrow{OM}=\vec{0}$ であったら，$\overrightarrow{KP}=t\overrightarrow{OM}$ といえないからだ．

(2)　BCの中点Lを通りADに垂直な直線上の任意の点をQとする．(1)同様，ある実数 s を用いて

$\overrightarrow{OQ}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})+\frac{s}{2}\left(\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OA}\right)$ と表せる．

これと(1)の結果を見比べると，$t=s=1$ のとき，$\overrightarrow{OP}$ と $\overrightarrow{OQ}$ とは，ともにベクトル $\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD})$ に一致する．ゆえに，「Kを通り対辺CDに垂直な線」と「Lを通り対辺ADに垂直な直線」は，いずれも

$\overrightarrow{OE}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD})$ なる定点Eを通る．

他の2直線もEを通ることが同様に示される．■

B.128

ベクトルの集合 $V=\{\vec{v}=(x,\ y)\,|\,x^2+y^2\leqq 1\}$ に属する任意の2つのベクトル $\vec{v_1}$, $\vec{v_2}$ と任意の2つの負でない実数 α, β とに対し，ベクトル $\alpha\vec{v_1}+\beta\vec{v_2}$ の大きさは，$\alpha+\beta$ を超えないことを証明せよ．

アプローチ $|\alpha\vec{a_1}+\beta\vec{v_2}|\leqq\alpha+\beta$ を証明するには，$|\alpha\vec{v_1}+\beta\vec{v_2}|^2\leqq(\alpha+\beta)^2$ を示せばよい．

解答 $\vec{v_1}\in V$, $\vec{v_2}\in V$ とすると，

$$\begin{cases}\vec{v_1}=(x_1,\ y_1) & x_1^2+y_1^2\leqq 1 \quad\cdots\cdots\ ①\\ \vec{v_2}=(x_2,\ y_2) & x_2^2+y_2^2\leqq 1 \quad\cdots\cdots\ ②\end{cases}$$

とおける．このとき，

$$\alpha\vec{v_1}+\beta\vec{v_2}=(\alpha x_1+\beta x_2,\ \alpha y_1+\beta y_2)$$

$$\therefore\quad |\alpha\vec{v_1}+\beta\vec{v_2}|^2=(\alpha x_1+\beta x_2)^2+(\alpha y_1+\beta y_2)^2$$
$$=\alpha^2(x_1^2+y_1^2)+2\alpha\beta(x_1x_2+y_1y_2)$$
$$+\beta^2(x_2^2+y_2^2)$$

となるが，絶対不等式

$$(x_1x_2+y_1y_2)^2=(x_1^2+y_1^2)(x_2^2+y_2^2)$$
$$-(x_1y_2-x_2y_1)^2$$
$$\leqq(x_1^2+y_1^2)(x_2^2+y_2^2)$$

◀ $(x_1x_2+y_1y_2)^2\leqq(x_1^2+y_1^2)\times(x_2^2+y_2^2)$（コーシー・シュバルツの不等式）

が成り立つこと，および①，②，$\alpha\beta\geqq 0$ とから，不等式

$$|\alpha\vec{v_1}+\beta\vec{v_2}|^2\leqq\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2=(\alpha+\beta)^2$$

が導かれる．これと $\alpha+\beta\geqq 0$ とから

$$|\alpha\vec{v_1}+\beta\vec{v_2}|\leqq\alpha+\beta \quad ■$$

研究 三角不等式：$|\vec{u}+\vec{v}|\leqq|\vec{u}|+|\vec{v}|$ を利用すると，本問はただちに解決する．実際，

$$|\alpha\vec{v_1}+\beta\vec{v_2}|\leqq|\alpha\vec{v_1}|+|\beta\vec{v_2}|$$

◀ 三角不等式

$$=\alpha|\vec{v_1}|+\beta|\vec{v_2}|$$

◀ $\alpha\geqq 0$, $\beta\geqq 0$

$$\leqq\alpha+\beta$$

◀ $|\vec{v_1}|\leqq 1$, $|\vec{v_2}|\leqq 1$,

とすればよい．

B.129

$\vec{a}=(1,\ -2,\ -3)$，$\vec{b}=(1,\ 5,\ 4)$ とする．

(1) $\vec{a}$，$\vec{b}$ のなす角 $\theta(0°\leqq\theta<180°)$ を求めよ．

(2) $\vec{a}$，$\vec{b}$ のいずれにも垂直な単位ベクトル $\vec{e}$ を求めよ．

アプローチ 内積に関する基本問題です．

A1.8 III 3° ▶ **解答** (1)

$$\begin{cases} |\vec{a}|=\sqrt{1^2+(-2)^2+(-3)^2} \\ \quad=\sqrt{14}, \\ |\vec{b}|=\sqrt{1^2+5^2+4^2} \\ \quad=\sqrt{42}, \\ \vec{a}\cdot\vec{b}=1\cdot1+(-2)\cdot5+(-3)\cdot4 \\ \quad=-21 \end{cases}$$

$$\therefore\ \cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{-21}{\sqrt{14}\sqrt{42}}$$

$$=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

弧度法なら $\theta=\frac{5}{6}\pi$ ▶

$$\therefore\ \boldsymbol{\theta=150°}$$

(2) $\vec{e}=(x,\ y,\ z)$ とすると，

$\vec{a}\perp\vec{e}$ より $\vec{a}\cdot\vec{e}=x-2y-3z=0$ ……… ①

この連立方程式を解けばよい． ▶

$\vec{b}\perp\vec{e}$ より $\vec{b}\cdot\vec{e}=x+5y+4z=0$ ……… ②

$|\vec{e}|=1$ より $|\vec{e}|^2=x^2+y^2+z^2=1$ ……… ③

①，②を x，y について解くと

$$\begin{cases} x=z \\ y=-z \end{cases} \quad \cdots\cdots\cdots ④$$

④を③に代入して　$3z^2=1$

$$z=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

ゆえに，求めるベクトルは

$$\boldsymbol{\vec{e}=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{-1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{3}}\right)}$$

または

$$\boldsymbol{\vec{e}=\left(\frac{-1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{-1}{\sqrt{3}}\right)}.$$

B.130

直方体の相隣る3辺をOA, OB, OCとする．対角線ODが△ABCの平面と直交するのは，この直方体が立方体のときである．これをベクトルを用いて示せ．

解答 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ を x 軸, y 軸, z 軸にとる．

◀基準となるベクトルがたがいに垂直なときには，その方向を座標軸にとって成分を考えるとよい．

OA$=a$, OB$=b$, OC$=c$ とすると，

A$(a,\ 0,\ 0)$, B$(0,\ b,\ 0)$, C$(0,\ 0,\ c)$,

D$(a,\ b,\ c)$ となるので，

$$\overrightarrow{OD}=(a,\ b,\ c)$$

$$\overrightarrow{AB}=(-a,\ b,\ 0),\ \overrightarrow{AC}=(-a,\ 0,\ c)$$

より，

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{OD}\cdot\overrightarrow{AB}=a(-a)+b\cdot b+c\cdot 0=-a^2+b^2\\ \overrightarrow{OD}\cdot\overrightarrow{AC}=a(-a)+b\cdot 0+c\cdot c=-a^2+c^2\end{array}\right\}$$

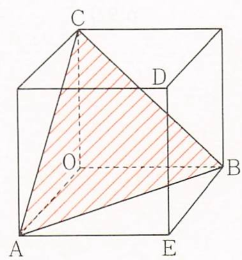
よって，

$$\begin{aligned}\text{OD}\perp\text{平面 ABC} &\iff \overrightarrow{OD}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OD}\cdot\overrightarrow{AC}=0\\ &\iff -a^2+b^2=-a^2+c^2=0\\ &\iff a=b=c\\ &\iff \text{この直方体は立方体}\end{aligned}$$ ■

別解 (座標を使わずに証明する.)

$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ と書くと，OA, OB, OCは直方体の相隣る3辺だから，

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=0 \quad \cdots\cdots\cdots ①$$



また，O, A, Bを含む立方体の面をOAEBとすると，

$$\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{ED}=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$$

であるから，①を用いると，

$$\overrightarrow{OD}\cdot\overrightarrow{AB}=(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\cdot(\vec{b}-\vec{a})$$

$$=|\vec{b}|^2-|\vec{a}|^2 \quad \cdots\cdots\cdots ②$$

◀式の展開 $(a+b+c)(b-a)=b^2-a^2+cb-ca$ と同じ．

同様に，$\overrightarrow{OD}\cdot\overrightarrow{AC}=|\vec{c}|^2-|\vec{a}|^2 \quad \cdots\cdots\cdots ③$

②, ③より，OD⊥平面ABCとなるのは

$$|\vec{b}|^2-|\vec{a}|^2=|\vec{c}|^2-|\vec{a}|^2=0$$

$$\therefore\ |\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|$$

すなわち，立方体のときである．■

B.131

$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ は $|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ を満たす空間の定ベクトルとする．実数 x を変数とする関数

$$f(x)=|(\cos x)\vec{a}+(\sin x)\vec{b}+\vec{c}|$$

の最大値，最小値を M, m とすると，M^2+m^2 を求めよ．

アプローチ ベクトルの大きさ $|\vec{u}|$ を計算するときには，多くの場合 $|\vec{u}|^2=\vec{u}\cdot\vec{u}$ を利用します．

解答 つねに $f(x)\geqq 0$ だから，$\{f(x)\}^2$ の最大値が M^2，最小値が m^2 である．

$$\begin{aligned}\{f(x)\}^2&=|(\cos x)\vec{a}+(\sin x)\vec{b}+\vec{c}|^2\\&=\cos^2x|\vec{a}|^2+\sin^2x|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2\\&\quad+2(\cos x\sin x)\vec{a}\cdot\vec{b}+2(\cos x)\vec{a}\cdot\vec{c}\\&\quad+2(\sin x)\vec{b}\cdot\vec{c}\\&=\cos^2x+\sin^2x+1+2(\vec{a}\cdot\vec{c})\cos x\\&\quad+2(\vec{b}\cdot\vec{c})\sin x\end{aligned}$$

$[\because\ |\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1,\ \vec{a}\cdot\vec{b}=0]$

$$\begin{aligned}&=2+2\{(\vec{a}\cdot\vec{c})\cos x+(\vec{b}\cdot\vec{c})\sin x\}\\&=2+2\sqrt{(\vec{a}\cdot\vec{c})^2+(\vec{b}\cdot\vec{c})^2}\cos(x-\alpha)\end{aligned}$$

［ただし，α は x によらぬ角］

> $|\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}|^2$
> $=(\vec{u}+\vec{v}+\vec{w})\cdot(\vec{u}+\vec{v}+\vec{w})$
> $=|\vec{u}|^2+|\vec{v}|^2+|\vec{w}|^2+2\vec{u}\cdot\vec{v}$
> $+2\vec{u}\cdot\vec{w}+2\vec{v}\cdot\vec{w}$

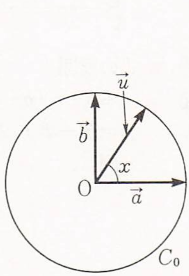
> 単振動の合成（大学への数学II ニューアプローチ p.92）

であり，x が変化するとき，$\cos(x-\alpha)$ は -1 から 1 までのすべての値をとれるから，

$$M^2=2+2\sqrt{(\vec{a}\cdot\vec{c})^2+(\vec{b}\cdot\vec{c})^2}$$
$$m^2=2-2\sqrt{(\vec{a}\cdot\vec{c})^2+(\vec{b}\cdot\vec{c})^2}$$

である．したがって，

$$\boldsymbol{M^2+m^2=4}$$



［注］ $|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ より，$\vec{u}=(\cos x)\vec{a}+(\sin x)\vec{b}$ は，図のように，$\vec{a}$, $\vec{b}$ で定められる平面上で，原点Oを中心とする円 C_0 を描く．

$\vec{p}=(\cos x)\vec{a}+(\sin x)\vec{b}+\vec{c}=\vec{u}+\vec{c}$ は円 C_0 を $\vec{c}$ だけ平行移動した円 C を描く．$f(x)$ は原点Oから，この円 C 上の点P $(\overrightarrow{OP}=\vec{p})$ までの距離 OP である．

B.132

(1)　$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，△OAB の面積$=S$ とすると，
$4S^2=|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2$ であることを証明せよ．

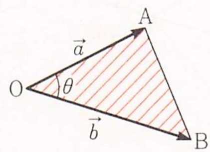
(2)　O(0，0，0)，A(−2，3，−1)，B(4，−5，2)，
C(3，2，−1) とする．

(a)　△OAB の面積 S を求めよ．

(b)　4 面体 OABC の体積 V を求めよ．

解答　(1)　$\angle AOB=\theta$ とすると

$$S=\frac{1}{2}|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta,$$



$$\therefore\quad 4S^2=|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2\sin^2\theta=|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2(1-\cos^2\theta)$$
$$=|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta)^2$$
$$=|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2\quad ■$$

(2)　(a)　$\begin{cases}\overrightarrow{OA}=(-2,\ 3,\ -1)\\ \overrightarrow{OB}=(4,\ -5,\ 2)\end{cases}$

$$\begin{cases}|\overrightarrow{OA}|^2=(-2)^2+3^2+(-1)^2=14,\\ |\overrightarrow{OB}|^2=4^2+(-5)^2+2^2=45\\ \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=(-2)\cdot4+3\cdot(-5)+(-1)\cdot2=-25\end{cases}$$

$$\therefore\quad 4S^2=14\cdot45-(-25)^2=5$$

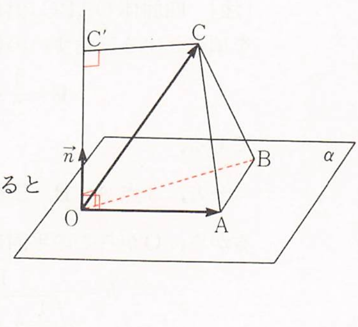
$$\therefore\quad \boldsymbol{S=\frac{\sqrt{5}}{2}}$$

(b)　$\overrightarrow{OA}$ にも $\overrightarrow{OB}$ にも垂直なベクトルを
$\vec{n}=(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$ とおくと

$$\begin{cases}\overrightarrow{OA}\cdot\vec{n}=-2\alpha+3\beta-\gamma=0\\ \overrightarrow{OB}\cdot\vec{n}=4\alpha-5\beta+2\gamma=0\end{cases}$$

$\therefore\quad \alpha:\beta:\gamma=1:0:(-2).$

そこで，$\vec{n}=(1,\ 0,\ -2)$ とする．



$\overrightarrow{OC}$ の，$\vec{n}$ 方向の直線への正射影を $\overrightarrow{OC'}$ とすると

$$\begin{cases}\overrightarrow{OC'}=k\vec{n}\\ (\overrightarrow{OC'}-\overrightarrow{OC})\cdot\vec{n}=0\end{cases}$$

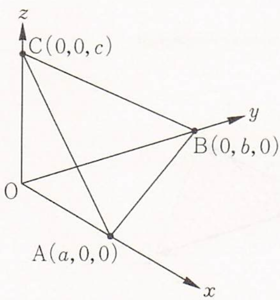
より　$\overrightarrow{OC'}=\dfrac{\overrightarrow{OC}\cdot\vec{n}}{|\vec{n}|^2}\vec{n}=(1,\ 0,\ -2)$

ゆえに，C から平面 OAB に下した垂線の長さ h は，
$h=|\overrightarrow{OC'}|=\sqrt{5}$ である．よって，求める体積は

$$V=\frac{1}{3}Sh=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{5}}{2}\cdot\sqrt{5}=\boldsymbol{\frac{5}{6}}$$

B.133

空間に直交座標軸をとり，その原点をOとし，x 軸，y 軸，z 軸上にそれぞれA，B，Cをとる．△ABC，△AOB，△BOC，△COA の面積をそれぞれ S，S_1，S_2，S_3 とするとき，S を S_1，S_2，S_3 で表せ．



解答　A，B，Cの座標を

A$(a,\ 0,\ 0)$，B$(0,\ b,\ 0)$，C$(0,\ 0,\ c)$

とおく．四面体OABCの側面の面積や体積を問題にしているだけだから，a，b，c は正の数であるとしてよい．

まず，

$$S_1=\frac{1}{2}ab,\quad S_2=\frac{1}{2}bc,\quad S_3=\frac{1}{2}ac.\ \cdots\cdots\cdots\ ①$$

一方，

☞ B.132 ▶

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2\cdot|\overrightarrow{AC}|^2-(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{(a^2+b^2)(a^2+c^2)-a^4}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}.\ \cdots\cdots\cdots\ ②$$

①，②より　$S=\sqrt{S_1{}^2+S_2{}^2+S_3{}^2}$.

［注］　四面体OABCの体積を V とおくと，V は，△OABを底面，Cを頂点とする三角すいの体積と考えられるから，

$$V=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}ab\cdot c=\frac{1}{6}abc$$

である．

一方，3点A，B，Cを通る平面の方程式は $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$ であるから，Oからこの平面に至る距離 h は，

$$h=\frac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}}}=\frac{abc}{\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}}$$

である．これを，$\dfrac{1}{3}\cdot S\cdot h=V=\dfrac{1}{6}abc$ に代入すれば

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}=\sqrt{S_1{}^2+S_2{}^2+S_3{}^2}.$$

B.134

直角三角形OAB($\angle AOB=90^\circ$)を含む平面をπとおく．π上にない点Pから，平面πに下した垂線の足をQとするとき，$\overrightarrow{OQ}$を，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OP}=\vec{p}$を用いて表せ．

アプローチ 平面への正射影を求める問題です．*cf*. B.124

解答　点Qは，
$$\begin{cases} \text{i）} \ \text{Qは平面}\pi\text{上にある} \\ \text{ii）} \ PQ\perp\pi \end{cases}$$
という条件で決定される．i)より，

$$\overrightarrow{OQ}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}\ (\alpha,\ \beta\text{は実数}) \quad \cdots\cdots ①$$

とおける．

ii)は，

$$\begin{cases} \overrightarrow{PQ}\perp\vec{a} \\ \overrightarrow{PQ}\perp\vec{b} \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} \vec{a}\cdot\overrightarrow{PQ}=0 & \cdots\cdots ② \\ \vec{b}\cdot\overrightarrow{PQ}=0 & \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

と同値である．

①より，$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}-\vec{p}$

であるから，これを②，③へ代入すると，

$$\begin{cases} \vec{a}\cdot(\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}-\vec{p})=0 \\ \vec{b}\cdot(\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}-\vec{p})=0 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} \alpha|\vec{a}|^2+\beta\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{p} & \cdots\cdots\cdots ②' \\ \alpha\vec{a}\cdot\vec{b}+\beta|\vec{b}|^2=\vec{b}\cdot\vec{p} & \cdots\cdots\cdots ③' \end{cases}$$

◀αとβについての連立1次方程式である．

となる．ところで，$\angle AOB=90^\circ$であったから，

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$$

◀この条件のおかげで，計算が簡単になる．

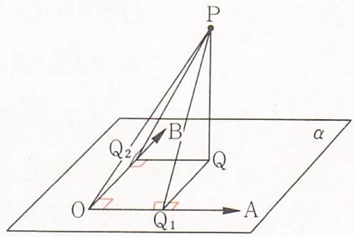
であるので，②′，③′より

$$\alpha=\frac{\vec{a}\cdot\vec{p}}{|\vec{a}|^2},\quad \beta=\frac{\vec{b}\cdot\vec{p}}{|\vec{b}|^2}$$

これを①へ代入すると，

$$\boldsymbol{\overrightarrow{OQ}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{p}}{|\vec{a}|^2}\vec{a}+\frac{\vec{b}\cdot\vec{p}}{|\vec{b}|^2}\vec{b}}$$

[注]　ここで得られた結果において，第一項は，$\vec{p}$の直線OAへの正射影，第2項は$\vec{p}$の直線OBへの正射影になっている．(☞B.124)　つまり，平面への正射影が，直交する2直線への正射影の和で表される，というわけである．

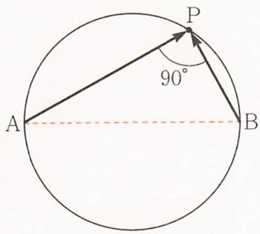


B.135

空間において，A，B は異なる定点とする．

(1) $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=0$　　(2) $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}<0$

のそれぞれを満たす動点Pの集合を定めよ．



解答 (1) $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=0$ は，

“P＝A または P＝B または $\angle APB=90°$”

を意味する．したがって，Pの軌跡は，A，B を含む1つの平面上に限定すれば，AB を直径とする円周となる．

平面上に限定しなければ，この円周を AB のまわりに回転して得られる図形，すなわち，

AB を直径の両端とする球面

である．

(2) $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}<0$ は

$\overrightarrow{AP}$ と $\overrightarrow{BP}$ のなす角 $\angle APB>90°$

を意味する．

A，B を含む1つの平面上に限定すれば，これを満たす点Pの集合は，AB を直径とする円の内部である．

平面上に限定しなければ，この範囲を AB のまわりに回転して得られる立体，すなわち，

AB を直径とする球面の内部

である．

研究 A，B，Pの位置ベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{p}$ とおくと，(1)は，

$$(\vec{p}-\vec{a})\cdot(\vec{p}-\vec{b})=0 \quad \cdots\cdots\cdots (1)'$$

という，いわば $\vec{p}$ についての2次方程式になる．通常の2次方程式と同様，(1)′ の左辺を展開して，平方完成すると，

$$|\vec{p}|^2-\vec{p}\cdot(\vec{a}+\vec{b})+\vec{a}\cdot\vec{b}=0$$

$$\therefore\ |\vec{p}|^2-2\left(\vec{p}\cdot\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}\right)+\left|\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}\right|^2=\left|\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}\right|^2-\vec{a}\cdot\vec{b}$$

$$\therefore\ \left|\vec{p}-\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}\right|^2=\frac{1}{4}|\vec{a}-\vec{b}|^2 \quad \therefore\ \left|\vec{p}-\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}\right|=\frac{1}{2}|\vec{a}-\vec{b}|$$

となり，これは，$(\vec{a}+\vec{b})/2$ を位置ベクトルとする点（すなわち線分 AB の中点）から動点Pに至る距離が一定 $(|\vec{a}-\vec{b}|/2=AB/2)$ であることを主張している．(2)についても同様である．

B.136

空間内に三角形 ABC がある．

$$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{CP}+\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{AP}=0 \quad \cdots\cdots\cdots \quad (*)$$

を満たす空間内の動点Pの存在範囲を求めよ．

アプローチ 適当に座標軸を定めて，$(*)$を座標についての方程式に書き換えるという手もありますが，ここでは，位置ベクトルを利用してみましょう．

解答 A，B，C，Pの位置ベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{p}$ とおくと

$$\begin{aligned}(*) \iff & (\vec{p}-\vec{a})\cdot(\vec{p}-\vec{b})+(\vec{p}-\vec{b})\cdot(\vec{p}-\vec{c}) \\ & +(\vec{p}-\vec{c})\cdot(\vec{p}-\vec{a})=0 \\ \iff & \{|\vec{p}|^2-(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{p}+\vec{a}\cdot\vec{b}\} \\ & +\{|\vec{p}|^2-(\vec{b}+\vec{c})\cdot\vec{p}+\vec{b}\cdot\vec{c}\} \\ & +\{|\vec{p}|^2-(\vec{c}+\vec{a})\cdot\vec{p}+\vec{c}\cdot\vec{a}\}=0 \\ \iff & 3|\vec{p}|^2-2(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\cdot\vec{p}+\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c} \\ & +\vec{c}\cdot\vec{a}=0 \\ \iff & 3\left|\vec{p}-\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}\right|^2 \\ & =\frac{1}{3}|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|^2-\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{b}\cdot\vec{c}-\vec{c}\cdot\vec{a} \\ \iff & \left|\vec{p}-\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}\right|^2=\frac{1}{9}\{|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2 \\ & +|\vec{c}|^2-\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{b}\cdot\vec{c}-\vec{c}\cdot\vec{a}\}\end{aligned}$$

となる．最後の式において

$$\begin{cases}左辺=|\overrightarrow{GP}|^2 \quad ただし，Gは\triangle ABCの重心 \\ 右辺=\dfrac{1}{18}\{|\vec{a}-\vec{b}|^2+|\vec{b}-\vec{c}|^2+|\vec{c}-\vec{a}|^2\}\end{cases}$$

$$=\frac{(AB^2+BC^2+CA^2)}{18}$$

であるから

$$(*) \iff GP=\frac{\sqrt{AB^2+BC^2+CA^2}}{3\sqrt{2}}$$

となる．ゆえに，$(*)$を満たすPの存在範囲は，

△ABC の重心 G を中心とする

半径 $\dfrac{\sqrt{AB^2+BC^2+CA^2}}{3\sqrt{2}}$ の球面

B.137

四面体ABCDの各頂点とその対面の三角形の重心を結ぶ4直線は，1点で交わることを証明せよ．

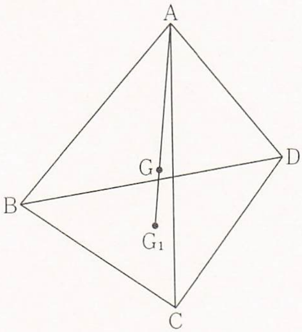
アプローチ 4直線が同一の定点を通ることをいえばよいわけです．

解答 △BCDの重心をG_1とおくと，直線AG_1上の任意の点Pに対し，$\overrightarrow{OP}$は，実数tを用いて

直線AG_1の**ベクトル方程式**

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+t\,\overrightarrow{AG_1}$$
$$=(1-t)\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OG_1} \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

と表せる．ただし，Oは空間内の任意の点である．



ところで，

$$\overrightarrow{OG_1}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD})$$

であるから，これを①に代入すると，

$$\overrightarrow{OP}=(1-t)\overrightarrow{OA}+\frac{t}{3}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}) \quad \cdots\cdots ②$$

となる．ここで，$t=\frac{3}{4}$とおくと，②の右辺は

$$\frac{1}{4}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD})$$

となる．すなわち，直線AG_1は

$$\overrightarrow{OG}=\frac{1}{4}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}) \quad \cdots\cdots\cdots ③$$

で定まる点Gを通る．

③より$\overrightarrow{AG}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AG_1}$だからGは，線分$AG_1$を3：1に内分する点．

同様に，他の3直線BG_2，CG_3，DG_4も，点Gを通る．

よって4直線AG_1，BG_2，CG_3，DG_4は③で定まる定点Gを通る．■

［注］ 上の解法では$t=3/4$が天下り的に与えられている印象をもつ人もいるだろう．実は，直線AG_1のベクトル方程式②などを$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$，$\overrightarrow{OD}$のかわりに線型独立な3つのベクトル$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{AD}$の線型結合で表すという実直な方針によれば，より自然に，

$$\overrightarrow{AG}=\frac{1}{4}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD})$$

という点Gで4直線が交わることを証明することができる．

B.138

空間内に異なる6点 A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 がある．この中から任意の3点を選んで作られる三角形の重心と残りの3点で作られる三角形の重心を通る直線は，定点を通ることを示せ．

解答　A_i ($i=1, 2, \cdots, 6$) から任意に選んだ3点を B_1, B_2, B_3 とし，残りの3点を B_4, B_5, B_6 とする．

空間内に任意の1点Oをとると，$\triangle B_1B_2B_3$ の重心 G_1 は

$$\overrightarrow{OG_1}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OB_1}+\overrightarrow{OB_2}+\overrightarrow{OB_3}) \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

を満たす．

同様に $\triangle B_4B_5B_6$ の重心 G_2 は

$$\overrightarrow{OG_2}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OB_4}+\overrightarrow{OB_5}+\overrightarrow{OB_6}) \quad \cdots\cdots\cdots ②$$

◀①，②は，B_1, B_2, B_3の選び方に依存する．

を満たす．

B_1, B_2, $\cdots$, B_6 は全体として A_1, A_2, $\cdots$, A_6 と一致するから，①+②より

$$\overrightarrow{OG_1}+\overrightarrow{OG_2}$$
$$=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OB_1}+\overrightarrow{OB_2}+\overrightarrow{OB_3}+\overrightarrow{OB_4}+\overrightarrow{OB_5}+\overrightarrow{OB_6})$$
$$=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{OA_3}+\overrightarrow{OA_4}+\overrightarrow{OA_5}+\overrightarrow{OA_6})$$

◀B_1, B_2, B_3 の選び方に依らない定ベクトル．

となるが，これは G_1G_2 の中点が B_1, B_2, B_3 の選び方によらないことを示している．すなわち，どの2つの三角形の重心を通る直線も

$$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{6}(\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{OA_3}+\overrightarrow{OA_4}+\overrightarrow{OA_5}+\overrightarrow{OA_6})$$

で定められる定点Mを通る．■

［注］ G_1 と G_2 が一致する場合は，「G_1 と G_2 を結ぶ直線」は定義されないが，$\overrightarrow{OG_1}=\overrightarrow{OG_2}=\overrightarrow{OM}$（すなわち，$G_1=G_2=M$）であるから，この場合も，「$G_1$, G_2 を通る直線がMを通る」と考えていいだろう．

B.139

点 A(2, 0, −1) を通り，ベクトル $\vec{n}=(3,\ -4,\ 5)$ に平行な直線を l とする．点 P(x, y, z) が l 上にのっているのは，x, y, z の間にどのような関係が成立するときか．

解答 点Pが l 上にあるための条件をベクトルで表すと

$\overrightarrow{AP}=t\vec{n}$ ……☆ となる実数が t が存在する

となる．

$\overrightarrow{AP}=\begin{pmatrix}x-2\\ y\\ z+1\end{pmatrix}$

☆を成分表示すると

$$\begin{cases}x-2=3t\\ y=-4t\\ z+1=5t\end{cases}$$

となる．

これから t を消去すると

$$\boldsymbol{\frac{x-2}{3}=\frac{y}{-4}=\frac{z+1}{5}}$$

という関係を得る．

解説 ここで求めた x, y, z についての関係式は，A1.9 II (p.32) で述べた直線の方程式である．p.32 の公式を覚えていれば，いきなり最終の形を答えることもできる．

逆に，上の方程式の各辺の値を t とおくと，l 上の点Pの各座標 x, y, z は

$$\begin{cases}x=3t+2\\ y=-4t\\ z=5t-1\end{cases}$$

と表されることがわかる．一般に直線

$$\frac{x-x_0}{\alpha}=\frac{y-y_0}{\beta}=\frac{z-z_0}{\gamma}$$

上の任意の点の座標は，

$$(x_0+\alpha t,\ y_0+\beta t,\ z_0+\gamma t)$$

と表される．これは，直線のベクトル方程式

$$\vec{v}=\vec{a}+t\vec{b}$$

において，$\vec{a}=(x_0,\ y_0,\ z_0)$，$\vec{b}=(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$ という成分を代入して計算したものにほかならない．

B.140

3点A(1, −1, 2), B(−1, −3, 3), P(x, y, z) が同一直線上にあるのは x, y, z にどのような関係が成りたつときか.

アプローチ　相異なる2点A, Bを結ぶ直線上に点Pがあるための必要十分条件は $\overrightarrow{AP}=t\overrightarrow{AB}$ を満たす実数 t が存在することである.

解答
$$\begin{cases}\overrightarrow{AP}=(x-1,\ y+1,\ z-2)\\ \overrightarrow{AB}=(-1-1,\ -3-(-1),\ 3-2)\\ \quad=(-2,\ -2,\ 1)\end{cases}$$
を直線ABのベクトル方程式(媒介変数表示)
$$\overrightarrow{AP}=t\overrightarrow{AB}$$
に代入すると,
$$(x-1,\ y+1,\ z-2)=t(-2,\ -2,\ 1)$$
$$\therefore\quad \begin{cases}x-1=-2t\\ y+1=-2t\\ z-2=t\end{cases}$$
となる. これらを t について解くと
$$\therefore\quad \begin{cases}\dfrac{x-1}{-2}=t\\ \dfrac{y+1}{-2}=t\\ z-2=t\end{cases}$$
となる. これらから t を消去すると,

◀媒介変数 t の消去.

$$\boldsymbol{\frac{x-1}{-2}=\frac{y+1}{-2}=z-2}$$
となる.

[注]　3点A, B, Pが同一直線上にあることは点Pが2点A, Bを通る直線上にあることにほかならない. したがって, ここで求めた方程式は, P(x, y, z) が直線AB上にあるための必要十分条件, つまり, “直線ABの方程式” である.

B.141

点 $A(-4,\ 1,\ 5)$ を通り，ベクトル $\vec{u_1}=(1,\ -2,\ 2)$ に平行な直線 l_1，点 $(0,\ 3,\ 2)$ を通り，ベクトル $\vec{u_2}=(3,\ 4,\ -5)$ に平行な直線を直線 l_2 とする．

(1)　l_1，l_2 は1点で交わる．交点の座標を求めよ．

(2)　l_1，l_2 のなす角を求めよ．

解答　(1)　l_1，l_2 上の任意の点はそれぞれ

$(t_1-4,\ -2t_1+1,\ 2t_1+5)$

$(3t_2,\ 4t_2+3,\ -5t_2+2)$

と表せるので，l_1，l_2 の交点が存在するということは，

2個の未知数に対して，方程式が3個.

$$\begin{cases} t_1-4=3t_2 & \cdots\cdots\ ① \\ -2t_1+1=4t_2+3 & \cdots\cdots\ ② \\ 2t_1+5=-5t_2+2 & \cdots\cdots\ ③ \end{cases}$$

のすべてを成立させる t_1，t_2 の実数値が存在することである．

①，②を満たす t_1，t_2 は

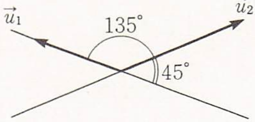
$$t_1=1,\ t_2=-1.$$

この t_1，t_2 に対し，③も成立する．

以上から，l_1，l_2 は交わる．その交点は

$$(\mathbf{-3,\ -1,\ 7})$$

(2)　$\vec{u_1}$，$\vec{u_2}$ のなす角を $\theta(0°\leqq\theta\leqq180°)$ とおくと，



$$\cos\theta=\frac{\vec{u_1}\cdot\vec{u_2}}{|\vec{u_1}||\vec{u_2}|}=\frac{-15}{\sqrt{9}\sqrt{50}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$\therefore\quad \theta=135°$

ゆえに l_1 と l_2 のなす角は **45°**

［注］ベクトルのなす角としては，鈍角も考えるが，直線のなす角としては，鋭角の方をとるのが習慣．(図を参照して下さい)

B.142

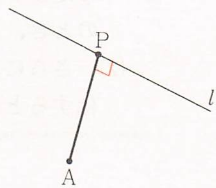
点$(-1,\ 4,\ 8)$を通り，ベクトル$(2,\ 1,\ -3)$に平行な直線lに，点A$(1,\ -1,\ 3)$から下した垂線の足Pの座標を求めよ．

解答　直線l上の点Pの座標は

$$\mathrm{P}(2t-1,\ t+4,\ -3t+8)$$

とおける．このとき

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(2t-2,\ t+5,\ -3t+5).$$



一方，直線lは$\vec{u}=(2,\ 1,\ -3)$に平行であるから，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\perp l$の条件は

$$\vec{u}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}=2(2t-2)+(t+5)-3(-3t+5)=0$$

$$\therefore\quad t=1$$

となることである．　　$\therefore$ **P(1, 5, 5)**

B.143

点A$(-1,\ 3,\ 0)$を通り，ベクトル$(2,\ -2,\ 1)$に平行な直線をl，点$(2,\ 4,\ 2)$を通り，ベクトル$(1,\ 2,\ -1)$に平行な直線をmとする．l上の点Pとm上の点Qを結んだ直線nがl，m双方と垂直になるのはP，Qがどのような点のときか．

解答　l，m上の任意の点P，Qの座標はそれぞれ

$$\begin{cases}\mathrm{P}(2t-1,\ -2t+3,\ t)\\ \mathrm{Q}(s+2,\ 2s+4,\ -s+2)\end{cases}$$

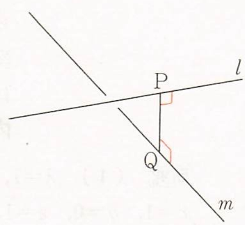
とおける．そこで，ベクトル

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=(-2t+s+3,\ 2t+2s+1,\ -t-s+2)$$

が，2直線の方向ベクトル$\vec{a}=(2,\ -2,\ 1)$，$\vec{b}=(1,\ 2,\ -1)$の両方と直交するように，s，tの値を定めればよい．

$$\therefore\begin{cases}\vec{a}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=2(-2t+s+3)\\ \qquad -2(2t+2s+1)+(-t-s+2)=0\\ \vec{b}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=(-2t+s+3)\\ \qquad +2(2t+2s+1)-(-t-s+2)=0\end{cases}$$

$$\therefore\quad t=1,\ s=-1.$$



ゆえに，nがl，m双方と垂直になるのは

P(1, 1, 1)，Q(1, 2, 3)

のときである．

B.144

(1)　Oを原点とする xyz 空間内に3点A(1, 0, 1), B(0, 2, 1), C(3, 1, 0) がある．λ, μ, γ が，
$\lambda+\mu+\gamma=1$ を満たして変化するとき，

$$\overrightarrow{OP}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}+\gamma\overrightarrow{OC} \quad \cdots\cdots\cdots(*)$$

で定まる点をPとおき，その座標を (x, y, z) とおく．このとき，x, y, z の間に成り立つ関係式を求めよ．

(2)　さらに，λ, μ, γ が，$\lambda>0$, $\mu>0$, $\gamma>0$ も満たして変化するとき，Pはどのような図形を描くか．

解答　(1)　$\lambda=1-\mu-\gamma$ を $(*)$ に代入すると

$$\overrightarrow{OP}=(1-\mu-\gamma)\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}+\gamma\overrightarrow{OC}$$
$$=\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{AB}+\gamma\overrightarrow{AC}$$

$\overrightarrow{OA}$ を移項して

$$\overrightarrow{AP}=\mu\overrightarrow{AB}+\gamma\overrightarrow{AC} \quad \cdots\cdots\cdots(**)$$

これは，点Pが，Aを通り，$\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AC}$ に平行な平面，すなわち，3点A, B, Cを通る平面上にあることを示す．

この式を成分表示すると，$\overrightarrow{AP}=(x-1, y, z-1)$, $\overrightarrow{AB}=(-1, 2, 0)$, $\overrightarrow{AC}=(2, 1, -1)$ より

$$\begin{cases} x-1=\mu(-1)+\gamma\cdot 2 \\ y=\mu\cdot 2+\gamma\cdot 1 \\ z-1=\mu\cdot 0+\gamma(-1) \end{cases}$$

となる．

この3式から，μ, γ を消去すると

$$\boldsymbol{2x+y+5z=7}$$

という関係式を得る．

(2)　次に，条件 $\lambda>0$, $\mu>0$, $\gamma>0$ を考える．$\lambda>0$ は $1-\mu-\gamma>0$ つまり $\mu+r<1$ と同値だから，μ, γ が $\mu>0$, $\gamma>0$, $\mu+\gamma<1$ を満たしながら変化するとき，$\overrightarrow{AP}=\mu\overrightarrow{AB}+\gamma\overrightarrow{AC}$ で定まる点Pは，B.114 (2)と同様の考察により，**三角形ABCの内部** を動くことがわかる．

研究　(1)　$\lambda=1$, $\mu=\gamma=0$ の時の点PはAであるから，Aの座標 $x=1$, $y=0$, $z=1$ は上の関係式を満たしている．代入した式

$$2\cdot1+1\cdot0+5\cdot1=7$$

を上の関係式から引けば

$$2(x-1)+1\cdot y+5(z-1)=0$$

という形の式を得る．この式は $\vec{n}=(2,\ 1,\ 5)$ とおくと

$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AP}=0$$

と表すことが出来る．これは $\vec{n}$ がPの動く平面の法線ベクトルであることを示す．

逆に，$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$ 双方に垂直なベクトル $\vec{n}$ を先に求め，これから上の関係式を導くこともできる．

(2)　(2)の解答において，$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$ が線形独立である，という事実を用いていないことに注意されたい．$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$ が線形独立でなくとも，いいかえるとA，B，Cを通る平面上にOがのっていても(たとえば平面ベクトルを考えているとき)

λ，μ，γ が $\lambda>0$，$\mu>0$，$\gamma>0$，$\lambda+\mu+\gamma=1$ をみたしながら変化するとき

$$\overrightarrow{OP}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}+\gamma\overrightarrow{OC}$$

で決まる**点Pは三角形ABCの内部を動く**

が成り立つのである．これがB.107[注]で述べたことであった．

B.145

点A(2, 3, 4)を含み，ベクトル $\vec{n}=(3,\ 1,\ 1)$ に垂直な平面を α とする．点 $P(x,\ y,\ z)$ が α 上にのっているのは，x，y，z にどのような関係が成立するときか．

解答　Pが α 上にのっているという条件は $\overrightarrow{AP}$ が平面 α と平行である，という条件と同値であり，これはさらに $\overrightarrow{AP}$ と $\vec{n}$ が垂直，すなわち $\overrightarrow{AP}\cdot\vec{n}=0$ と同値である．

$\overrightarrow{AP}=(x-2,\ y-3,\ z-4)$，$\vec{n}=(3,\ 1,\ 1)$

より，この式は

$$3\cdot(x-2)+1\cdot(y-3)+1\cdot(z-4)=0$$

と表される．整理すると，

$$3x+y+z-13=0$$

となる．

解説　ここで求めた関係式は，A1.9IVで述べた1点を通る平面の方程式である．もちろん，この公式を用いて，関係式をただちに導くことが出来る．

B.146

3点A，B，Cが平面を決定する場合，点Pがこの平面上にあるための必要十分条件は，

$\overrightarrow{AP}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}$ を満たす実数 α，β が存在することである．

これを利用して，4点A(2，−1，0)，B(1，0，1)，C(−1，1，−3)，P(x，y，z)が同一平面上にあるための条件を求めよ．

解答

$$\overrightarrow{AB}=(1-2,\ 0-(-1),\ 1-0)=(-1,\ 1,\ 1)$$

$$\overrightarrow{AC}=(-1-2,\ 1-(-1),\ -3-0)=(-3,\ 2,\ -3)$$

$$\overrightarrow{AP}=(x-2,\ y+1,\ z)$$

を

$$\overrightarrow{AP}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}$$

平面ABCのベクトル方程式（媒介変数表示） ▶

に代入すると，

$$(x-2,\ y+1,\ z)=\alpha(-1,\ 1,\ 1)+\beta(-3,\ 2,\ -3)=(-\alpha-3\beta,\ \alpha+2\beta,\ \alpha-3\beta)$$

$$\therefore\ \begin{cases} x-2=-\alpha-3\beta & \cdots\cdots\ ① \\ y+1=\alpha+2\beta & \cdots\cdots\ ② \\ z\quad\ =\alpha-3\beta & \cdots\cdots\ ③ \end{cases}$$

となる．

①，②を α，β について解くと

$$\begin{cases} \alpha=2x+3y-1 \\ \beta=-x-y+1 \end{cases}$$

媒介変数 α，β を消去． ▶

となるから，これを③に代入して，α，β を消去すれば，(x，y，z)の満たすべき条件

$$\boldsymbol{5x+6y-z-4=0}$$

を得る．

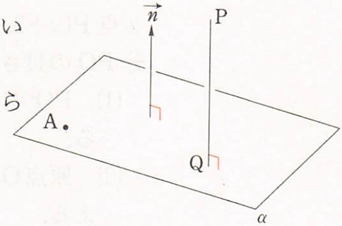
［注］　4点A，B，C，Pが同一平面上にあるとは，点Pが3点A，B，Cで決定される平面上にあることにほかならない．したがって，ここで求めた方程式は，P(x，y，z)が平面ABC上にあるための必要十分条件であるから，いわゆる“平面ABCの方程式”である．

B.147

空間内に，$\vec{0}$ でないベクトル $\vec{n}=(a,\ b,\ c)$ と点 A$(p,\ q,\ r)$，点 P$(x_0,\ y_0,\ z_0)$ が与えられている．

点Aを含み，$\vec{n}$ に垂直な平面を α とし，P から α に下した垂線の足をQとする．

$\overrightarrow{PQ}$ を $\vec{n}$ と $\overrightarrow{AP}$ で表し，これを利用して，$|\overrightarrow{PQ}|$ を求めよ．



解答　Qが，Pから，α への垂線の足であるとは，

i）$\overrightarrow{PQ} /\!/ \vec{n}$
ii）Qが平面 α 上にある

ということである．

i)より，適当な実数 k を用いて，

$$\overrightarrow{PQ}=k\vec{n} \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

$$\therefore\ \overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{AP}+k\vec{n} \quad \cdots\cdots\cdots ①'$$

とおける．一方，ii)より

$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AQ}=0 \quad \cdots\cdots\cdots ②$$

である．①′を②に代入すると

$$\vec{n}\cdot(\overrightarrow{AP}+k\vec{n})=0 \qquad \therefore\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AP}+k|\vec{n}|^2=0$$

これより　$k=-\dfrac{\vec{n}\cdot\overrightarrow{AP}}{|\vec{n}|^2}$　$\cdots\cdots\cdots$ ③

①と③より

$$\overrightarrow{PQ}=-\frac{\vec{n}\cdot\overrightarrow{AP}}{|\vec{n}|^2}\vec{n}$$

◀正射影

$$|\overrightarrow{PQ}|=|k||\vec{n}|=\frac{|\vec{n}\cdot\overrightarrow{AP}|}{|\vec{n}|}$$

$$=\frac{|a(x_0-p)+b(y_0-q)+c(z_0-r)|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$=\boldsymbol{\frac{|ax_0+by_0+cz_0-(ap+bq+cr)|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}}$$

研究　平面 α の方程式は

$$a(x-p)+b(y-q)+c(z-r)=0$$

すなわち　$ax+by+cz=(ap+bq+cr)$

であるから，上で証明した公式は，p.35 のようにいいかえることができる．

B.148

実数 s，t は互いに独立に変化する変数とする．空間内の2点 $\mathrm{P}(s+2,\ 2s,\ s+4)$，$\mathrm{Q}(t+3,\ -2t+5,\ -2t)$ を結ぶ線分PQの長さの最小値を次の各方法で求めよ．

(1) PQ^2 を計算し，まず s を定数と見て，最小値を求める．

(2) 原点Oに対し，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ となる点Rの描く図形を考える．

解答 (1) $\mathrm{PQ}^2=(t-s+1)^2+(-2t-2s+5)^2+(-2t-s-4)^2$ を，まず s を定数とみて t について整理すると

$$\mathrm{PQ}^2=9t^2+(10s-2)t+(6s^2-14s+42)$$
$$=9\left(t+\frac{5s-1}{9}\right)^2+\frac{29s^2-116s+377}{9}$$

さらに，この t に関する定数項を，s の2次式とみて平方完成して

$$=9\left(t+\frac{5s-1}{9}\right)^2+\frac{29(s-2)^2}{9}+29$$ となる．

ゆえに PQ^2 は $t=-\dfrac{5s-1}{9}$，$s=2$ のとき最小値29をとる．

よって，PQの長さの最小値は $\boldsymbol{\sqrt{29}}$ である．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=(-s+t+1,\ -2s-2t+5,\ -s-2t-4)$
$$=s(-1,\ -2,\ -1)+t(1,\ -2,\ -2)+(1,\ 5,\ -4)$$

より，点Rは点 $(1,\ 5,\ -4)$ を通り，ベクトル $(-1,\ -2,\ -1)$，$(1,\ -2,\ -2)$ に平行な平面 α 上を動く．この平面 α に垂直なベクトル $(a,\ b,\ c)$ は

$$(a,\ b,\ c)\cdot(-1,\ -2,\ -1)=0 \qquad -a-2b-c=0$$
$$(a,\ b,\ c)\cdot(1,\ -2,\ -2)=0 \quad \therefore \quad a-2b-2c=0$$

を解いて，$b=-\dfrac{3}{2}a$，$c=2a$．とくに $a=2$ とおけば $(a,\ b,\ c)=(2,\ -3,\ 4)$ となる．

$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OR}}|$ の最小値を与えるRはOから平面 α におろした垂線の足である．その垂線の長さは，前問の結果を用いて

平面 α に原点Oからおろした垂線の長さ．▶

$$\frac{|2\cdot0+(-3)\cdot0+4\cdot0-(2\cdot1+(-3)\cdot5+4(-4))|}{\sqrt{2^2+(-3)^2+4^2}}=\frac{|29|}{\sqrt{29}}$$

$=\boldsymbol{\sqrt{29}}$ となる．

［注］ (2)の平面の方程式は $2x-3y+4z+29=0$ となる．

B.149

空間内にねじれの位置にある2直線

$l_1 : \vec{p} = \vec{p_1} + s\vec{u}$

$l_2 : \vec{p} = \vec{p_2} + t\vec{v}$

($\vec{p_1}$, $\vec{p_2}$, $\vec{u}$, $\vec{v}$ は定ベクトル，s, t はパラメタ)

がある．点Pが l_1 上，点Qが l_2 上を動くとき，線分PQの中点Rは，いかなる図形を描くか．

$\vec{p_1}=(0,\ 2,\ -1)$,　　$\vec{p_2}=(-2,\ 0,\ 3)$

$\vec{u}=(3,\ -1,\ 2)$,　　$\vec{v}=(1,\ 2,\ 4)$

のとき，この図形の方程式を求めよ．

解答　Rの位置ベクトルを $\vec{r}$ とおくと

$$\vec{r}=\frac{\vec{p}+\vec{q}}{2}=\frac{\vec{p_1}+\vec{p_2}}{2}+\left(\frac{s}{2}\right)\vec{u}+\left(\frac{t}{2}\right)\vec{v} \quad \cdots\cdots\cdots \text{①}$$

と表せる．

これは点Rが，$\dfrac{\vec{p_1}+\vec{p_2}}{2}$ を位置ベクトルとする点を通り，$\vec{u}$, $\vec{v}$ と平行な平面を描くことを示している．

この平面の方程式を求める．

$\vec{r}=(x,\ y,\ z)$ とおいて①を成分表示すると

$$\begin{cases} x=-1+\dfrac{3}{2}s+\dfrac{1}{2}t & \cdots\cdots\cdots \text{②} \\ y=1-\dfrac{1}{2}s+t & \cdots\cdots\cdots \text{③} \\ z=1+s+2t & \cdots\cdots\cdots \text{④} \end{cases}$$

②, ③より

$$s=\frac{2(2x-y+3)}{7},\quad t=\frac{2(x+3y-2)}{7}$$

これを④に代入して，s, t を消去して整理して得られる

$$\mathbf{8x+10y-7z+5=0} \quad \cdots\cdots\cdots \text{⑤}$$

が求める方程式である．

B.150

2直線

$$l_1:\ \frac{x-2}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z-4}{1},\quad l_2:\ \frac{x-3}{-1}=\frac{y-5}{2}=\frac{z}{2}$$

について，l_2 を含み，l_1 に平行な平面 α の法線ベクトルを求めよ．

アプローチ 平面 α は，「l_2 上の点を通り，l_1，l_2 の両方に平行な平面」といいかえることができます．

解答 l_1 は $\vec{v_1}=(1,\ 2,\ 1)$ に平行

l_2 は $\vec{v_2}=(-1,\ 2,\ 2)$ に平行

であるから，平面 α は，$\vec{v_1}$，$\vec{v_2}$ の両方に平行である．

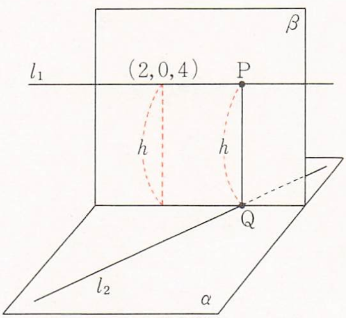
したがって α の法線ベクトル $\vec{n}$ は $\vec{v_1}$，$\vec{v_2}$ のいずれにも直交する．

よって，$\vec{n}=(a,\ b,\ c)$ とおくと，

$$\begin{cases} \vec{v_1}\cdot\vec{n}=\ \ a+2b+c\ =0 \\ \vec{v_2}\cdot\vec{n}=-a+2b+2c=0 \end{cases}$$

b，c について解くと $b=-\dfrac{3}{2}a$，$c=2a$

ゆえに，$\vec{n}$ として $\mathbf{(2,\ -3,\ 4)}$ をとれる．



PQが l_1, l_2 の共通垂線

研究 α が l_2 上の点 $(3,\ 5,\ 0)$ を含むことを考えると，α の方程式は

$$2(x-3)-3(y-5)+4z=0$$

$$\therefore\ 2x-3y+4z+9=0$$

となる．

$l_1 /\!/ \alpha$ であるから，l_1 上の任意の点から α に引いた垂線の長さは一定で，これは共通垂線 PQ の長さ h に等しい．

よって，h は l_1 上の点 $(2,\ 0,\ 4)$ から α に至る距離に等しく，

点と平面との距離 ▶

$$h=\frac{|2\cdot2-3\cdot0+4\cdot4+9|}{\sqrt{2^2+(-3)^2+4^2}}=\sqrt{29}$$

B. 151

(1)　空間内の平面 α は $\vec{n_1}=(2,\ 3,\ -5)$ に垂直，平面 β は $\vec{n_2}=(1,\ -1,\ -2)$ に垂直である．α と β の交線 l の方向ベクトルを求めよ．

(2)　2平面 $2x+3y-5z=9$，$x-y-2z=6$ の交線 l の方程式を求めよ．

解答　(1)　l の方向ベクトル $\vec{l}=(a,\ b,\ c)$ は α，β 双方に平行なベクトル，すなわち，α の法線ベクトル，β の法線ベクトル双方に垂直なベクトルである．ゆえに，

$$\vec{l}\cdot\vec{n_1}=2a+3b-5c=0$$
$$\vec{l}\cdot\vec{n_2}=a-b-2c=0$$

a，b について解くと

$$a=\frac{11}{5}c,\quad b=\frac{1}{5}c$$

$c=5$ とおけば

$$\vec{l}=(a,\ b,\ c)=(\mathbf{11},\ \mathbf{1},\ \mathbf{5})$$

(2)　直線 l は，(1)で求めたベクトル $\vec{l}$ を方向ベクトルにもつ．そこで，l 上の適当な1点の座標を求めればよい．そこで $z=0$ を満たす点をさがすことにする．2平面の方程式に $z=0$ を代入した

◁ どの1点でもよい．

$2x+3y=9$，　$x-y=6$

を満たす x，y を求めると　$x=\dfrac{27}{5}$，$y=-\dfrac{3}{5}$

◁ l は点 $\left(\dfrac{27}{5},\ -\dfrac{3}{5},\ 0\right)$ を通る．

よって，l の方程式は　$\boldsymbol{\dfrac{x-\frac{27}{5}}{11}=\dfrac{y+\frac{3}{5}}{1}=\dfrac{z}{5}}$

研究　本来は，平行でない2平面の方程式を連立させた方程式はどれも，空間内の直線の方程式と呼ばれてしかるべきである．本問では，方向ベクトルの各成分と，一直線上の一点の座標が一見してわかる「標準形」への同値変形を，あらかじめこれらを図形的考察によって求めておくことによって行った．純計算的同値変形を行なってももちろん「標準形」を得る．たとえば

$$\begin{cases}2x+3y-5z=9\\ x-y-2z=6\end{cases}\iff\begin{cases}5x-11z=27\\ 5y-z=3\end{cases}\iff\begin{cases}z=\dfrac{5x-27}{11}\\ z=5y+3\end{cases}$$

と同値変形すればよい．

x，y，z の１次方程式

$$ax+by+cz+d=0$$

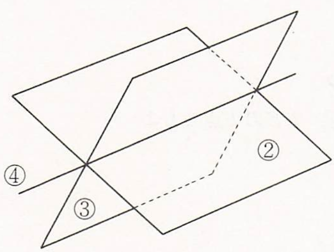
が xyz 空間内の平面を表すことは，すでに何回か経験しました．厳密にいうと，この話題は，指導要領で定められた必修範囲を超えますが，大学入試に向けて，是非修得しておきたいものの１つです．これから B.158 までは「範囲外の必修問題」と考えて下さい．

B.152

方程式

$(1+k)x+(1-k)y+(1+2k)z-6=0$

の表す平面は，定数 k の値によらずすべてある定直線を含むことを示し，その直線の方向ベクトルを１つ求めよ．



解答　k について整理すると

$$(x+y+z-6)+k(x-y+2z)=0 \quad \cdots\cdots \text{①}$$

これは k の値によらず，連立方程式

$$\begin{cases} x+y+z-6=0 & \cdots\cdots \text{②} \\ x-y+2z=0 & \cdots\cdots \text{③} \end{cases}$$

の解によって満たされる．

よって，平面①は，k の値によらず，２平面②，③の交わりである定直線を含んでいる．

そこで，この直線の方向ベクトルを求めよう．

▶以下，２平面②，③の交線の方程式を標準形になおしている．２平面②，③の法線ベクトル $(1,1,1)$，$(1,-1,2)$ の両方に垂直なベクトルとして求めることもできる．

②，③から y を消すと

$$2x+3z-6=0$$

②，③から x を消すと

$$2y-z-6=0$$

よって，②かつ③は

$$-\frac{2x-6}{3}=2y-6=z$$

すなわち

$$\frac{x-3}{3}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z}{-2} \quad \cdots\cdots \text{④}$$

と同値変形できる．

よって，その方向ベクトルの１つは，

$$(3,\ -1,\ -2)$$

B.153

2 平面 $2x+y-z=-1$，$x+y-2z=1$ の交線 l を含む平面のうちで，次のおのおのの条件を満たすものを求めよ．

(1)　原点を通る　　(2)　y 軸に平行

解答　与えられた平面の方程式は，それぞれ

$2x+y-z+1=0$　……… ①

$x+y-2z-1=0$　……… ②

と変形できる．そこで

k を定数として，①+②×k で作られる方程式

$2x+y-z+1+k(x+y-2z-1)=0$　……… ③

を考えると，これは平面の方程式であり，①，②をともに満たす (x, y, z) について成立する．

よって，③は与えられた 2 平面の交線 l を含む平面である．

◀じつは，上の 2 平面の交線を通る平面のうち $x+y-2z-1=0$ 以外は，すべて③で表される．☞[注]

(1)　平面③が原点を通るためには，③で

$x=y=z=0$

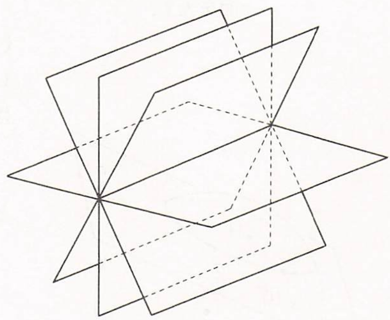
とおいて，　$k=1$

であることが必要十分である．

$k=1$ のとき③は

$$\mathbf{3x+2y-3z=0}$$

となる．



(2)　平面③が y 軸に平行になるのは，

(平面③の法線ベクトルの y 成分)

$=$(③の y の係数)$=1+k=0$

とおいて，

$k=-1$

となるときである．これより

$$\mathbf{x+z+2=0}$$

[注]　③を k の方程式とみると，$x+y-2z-1\fallingdotseq 0$ のときに唯一

$$k=-\frac{2x+y-z+1}{x+y-2z-1}$$

なる解をもつ．これは平面②上にない点を与えれば，③から k がただ 1 つ定まることを示す．いい換えれば，③は l を含む任意の平面(ただし平面②自身は除く)を表し得るということになる．

☞ 大学への数学IIニューアプローチ B.106

B.154

xyz 空間において方程式 $x^2+y^2+z^2=6x-2z$ ………　①
の表す曲面を考える．

(1)　上の曲面と xy 平面との交わりは何か．

(2)　上の曲面と平面 α：$2x-2y+z=-1$ との交わりは何か．

解答　(1)　与えられた方程式①を書き直すと，

$$(x-3)^2+y^2+(z+1)^2=10 \quad \cdots\cdots\cdots \text{①}'$$

となる．ゆえに①は，点 $(3,\ 0,\ -1)$ を中心とする半径 $\sqrt{10}$ の球面を表す．

一方，xy 平面の方程式は

$$z=0 \quad \cdots\cdots\cdots \text{②}$$

である．そこで②を①に代入すると，

$$x^2+y^2=6x,$$

$$\therefore\ (x-3)^2+y^2=3^2 \quad \cdots\cdots\cdots \text{③}$$

となり，これは xy 平面上では，点 $(3,\ 0)$ を中心とする半径 3 の円を表す．

xyz 空間内の円形を表す方程式と考えたときは，z 軸に平行な中心軸をもつ円柱面を表す．

よって求める交わりは，

中心が $(3,\ 0,\ 0)$，半径が 3 の円．

(2)　球の中心 $A(3,\ 0,\ -1)$ から平面 α へ下した垂線の足を H とおくと，直線 AH の方程式は，

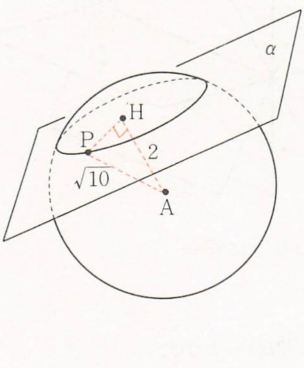
$$\frac{x-3}{2}=\frac{y}{-2}=\frac{z+1}{1}$$

となる．

α の方程式とこれを連立することにより

$$H\left(\frac{5}{3},\ \frac{4}{3},\ -\frac{5}{3}\right) \qquad \therefore\ AH=2$$

が得られる．よって，求める交わりは，



中心が $\left(\frac{5}{3},\ \frac{4}{3},\ -\frac{5}{3}\right)$，

半径が $\sqrt{10-2^2}=\sqrt{6}$ の円

解説　2つの図形の交わりを考えるには，それぞれの図形を表す方程式を連立して考えればよい．本問の場合

(1)では $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=6x-2z & \cdots\cdots\cdots ① \\ z=0 & \cdots\cdots\cdots ② \end{cases}$

(2)では $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=6x-2z & \cdots\cdots\cdots ① \\ 2x-2y+z=-1 & \cdots\cdots\cdots ②' \end{cases}$

である．

(1)の場合，②を①に代入して z を消去すると，交わりの円の方程式

$$x^2+y^2=6x \quad \cdots\cdots\cdots ③$$

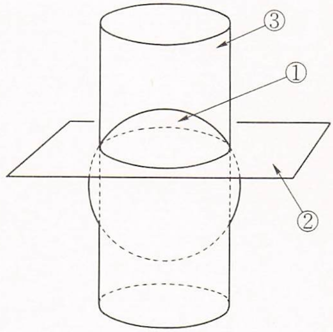
が現れたが，同じ手法を(2)に適用すると，どうなるであろうか？

②′ より，$z=-2x+2y-1$ である．これを①に代入して z を消去すると，

$$x^2+y^2+(-2x+2y-1)^2=6x-2(-2x+2y-1)$$

$$\therefore \quad 5x^2-8xy+5y^2-6x-1=0 \quad \cdots\cdots\cdots ③'$$

となる．③と違い，これは円を表す方程式ではない．(③′ は，xy 平面上で楕円を表す．)



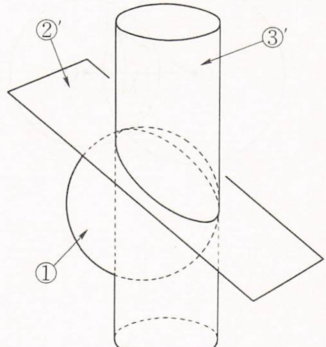
この事情を正しくとらえるためには，①と②から③を作る変形を,「連立して1文字を消去する」という形式的な理解を超えて，より深く理解しなければならない．この理解の手がかりを与えよう．

①と②から，③を導くことができたが，逆に②と③を仮定すると，①を導くことができる．実際，②より　　$z^2=-2z$

であるので，これと③より①が作られる．したがって

$$①かつ② \iff ②かつ③ \quad \cdots\cdots\cdots \quad (*)$$

である．



③は，xy 平面上で円を表す方程式であるが，xyz 空間では，この円を含み，z 軸方向に無限に伸びた円柱面を表している．したがって(＊)は，球面①と平面②との交わりが，平面②と円柱面③との交わりでもある，と主張していることになる．同様に，(2)では，

$$①かつ②' \iff ②'かつ③'$$

とすると，これは，球面①と平面②′ との交わりの円を，平面②′ と楕円柱面③′ との交わりとして表現することを意味する．

B.155

a は正の定数とする．2つの球面

S_1：　$x^2+y^2+z^2=9a^2$　………　①

S_2：　$(x-2a)^2+(y-a)^2+(z+2a)^2=6a^2$　………　②

について

(1)　S_1 と S_2 は交わることを示せ．

(2)　S_1 と S_2 の交わりの円の半径を求めよ．

解答

(1)　S_1 は，$O(0,\ 0,\ 0)$ を中心とする半径 $r_1=3a$ の球面

S_2 は，$A(2a,\ a,\ -2a)$ を中心とする半径 $r_2=\sqrt{6}\,a$ の球面

で，その中心間の距離 d は

$$d=\sqrt{4a^2+a^2+4a^2}=3a$$

である．したがって，

$$|r_1-r_2|<d<r_1+r_2$$

が成りたつので，S_1 と S_2 は確かに交わる．■

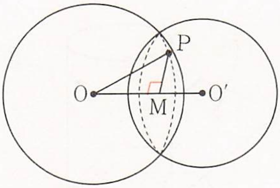
(2)　x，y，z の1次方程式を作ろうと考えて

①−② を計算すると，

$$4ax+2ay-4az-9a^2=9a^2-6a^2$$

$$\therefore\quad 2x+y-2z-6a=0 \qquad \cdots\cdots\cdots ③$$

③はその形から平面の方程式であり，その作り方から，①,②の共有点はすべて③の上にある．よって，平面③は，S_1, S_2 の交わりの円を含む平面である．



S_1 の中心 $O(0,\ 0,\ 0)$ から平面③に引いた垂線の足を M とすると，

$$OM=\frac{|2\cdot 0+0\cdot 0-2\cdot 0-6a|}{\sqrt{2^2+1^2+(-2)^2}}=2a \qquad \cdots\cdots\cdots ④$$

交わりの円周上の任意の点を P とすると

$$MP^2={r_1}^2-OM^2=(3a)^2-(2a)^2$$

より

求める円の半径＝MP＝$\boldsymbol{\sqrt{5}\,a}$．

［注］ (1)でも，“①かつ② $\Longleftrightarrow$ ①かつ③” であることに注目して球面①と平面③が交わることを示してもよい．

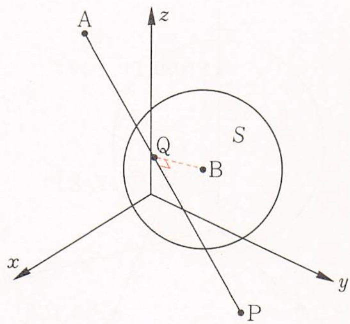
B.156

空間において，点A(3, 0, 6)があり点B(3, 4, 4)を中心とする半径2の球面Sが与えられている．点Aから球面Sへの任意の接線をひき，それがxy平面と交わる点をPとする．

(1)　球面S上の接点Qは定平面上にある．この平面の方程式を求めよ．

(2)　点Pはどんな曲線上にあるか．

解答　xy平面上の点P(α, β, 0)と点Aを結ぶ直線が，球面Sと接する接点をQとすると，Qは



i)　Qが直線AP上にある
ii)　Qが球面S上にある
iii)　$\overrightarrow{AQ}\cdot\overrightarrow{BQ}=0$

の3つで定まる．Q(x, y, z)とおくと，まずi)より

$$\frac{x-3}{\alpha-3}=\frac{y}{\beta}=\frac{z-6}{-6} \quad \cdots\cdots\cdots \text{①}$$

また，ii)より

$$(x-3)^2+(y-4)^2+(z-4)^2=4 \quad \cdots\cdots\cdots \text{②}$$

iii)より

$$(x-3)^2+y(y-4)+(z-4)(z-6)=0 \quad \cdots\cdots\cdots \text{③}$$

(1)　②−③より　$-4y+2z+4=0$

$$\therefore \quad 2y-z-2=0 \quad \cdots\cdots\cdots \text{④}$$

ゆえに，点Qは定平面 $\boldsymbol{2y-z-2=0}$ 上にある．

(2)　①と④を用いて，x, y, zをα, βで表すと

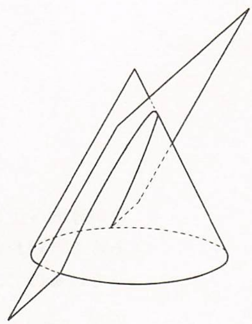
$$\frac{y}{\beta}=\frac{2y-8}{-6}$$

$$\therefore \quad y=\frac{4\beta}{\beta+3},\ x-3=\frac{4(\alpha-3)}{\beta+3},\ z-6=\frac{-24}{\beta+3}$$

となる．これらを③に代入x, y, zを消去すると

$$\frac{16(\alpha-3)^2+4\beta\cdot(-12)-24(2\beta-18)}{(\beta+3)^2}=0$$

$$\therefore \quad \beta=\frac{1}{6}(\alpha-3)^2+\frac{9}{2}$$　ゆえに，



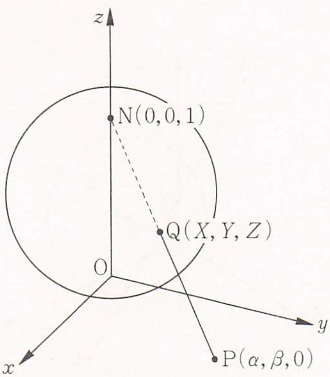
点Pはxy平面上，**放物線** $\boldsymbol{y=\frac{1}{6}(x-3)^2+\frac{9}{2}}$ 上にある．

B.157

点 O(0, 0, 0) と点 N(0, 0, 1) を直径の両端とする球面 S がある．xy 平面上の点 P(α, β, 0) を考え，直線 NP と球面 S との交わりで N と異なる点を Q(X, Y, Z) とする．

(1) X, Y, Z を α, β で表せ．

(2) Q が，球面 S と平面 $x+y=1/4$ の交わりの円 C 上を動くとき，点 P の描く図形を求めよ．



解答 (1) Q は線分 NP 上にあるので

$$\overrightarrow{NQ}=t\,\overrightarrow{NP} \quad \cdots\cdots ①$$

となる実数 t ($t \neq 0$) が存在する．

①を成分表示すると，

$$(X,\ Y,\ Z-1)=t(\alpha,\ \beta,\ -1)$$

$$\therefore\ X=t\alpha,\ Y=t\beta,\ Z=-t+1. \quad \cdots\cdots ①'$$

他方，Q は球面 S 上にもあるから

$$X^2+Y^2+Z(Z-1)=0. \quad \cdots\cdots ②$$

①′ を②に代入して t を求めると

$$t^2\alpha^2+t^2\beta^2+t(t-1)=0$$

$$\therefore\ t=\frac{1}{\alpha^2+\beta^2+1}. \quad \cdots\cdots ③$$

③を①′ に代入して

$$\boldsymbol{X=\frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2+1},\quad Y=\frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2+1},}$$

$$\boldsymbol{Z=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2+\beta^2+1}}$$

(2) P(α, β, 0) に対応する点 Q(X, Y, Z)

$$=\left(\frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2+1},\ \frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2+1},\ \frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2+\beta^2+1}\right)$$

が円 C 上にあるための条件は，

$$X+Y=1/4$$

$$\therefore\ \frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2+1}+\frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2+1}=\frac{1}{4} \quad \cdots\cdots ④$$

> Q が球面 S 上にあることはわかっているので，平面 $x+y=\frac{1}{4}$ 上にあるための条件を求めるだけでよい．

が成り立つことである．④を整理すると，

$$\alpha^2+\beta^2-4\alpha-4\beta+1=0$$

$$\therefore\ (\alpha-2)^2+(\beta-2)^2=7$$

となるから，点 P の描く図形は，xy 平面上，**点 (2, 2, 0) を中心とする半径 $\sqrt{7}$ の円** である．

B.158

方程式 $x^2+y^2+z^2=xy+yz+zx+3$ ……… ①

の表す曲面がどんな曲面であるかを，これと

平面　$x+y+z=k$ ……… ②

との交わりを調べることによって求めよ．

アプローチ ①，②を，なじみのある連立方程式に変形しようと努力します．

解答 ①，②の交わりをみるために，①，②を連立する．②^2 を作ると

$$x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)=k^2 \quad \cdots\cdots \ ②'$$

となるから，①と②が成り立つときは

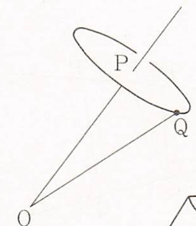
$$x^2+y^2+z^2=\frac{k^2}{3}+2 \quad \cdots\cdots\cdots \ ③$$

も成り立つ．逆に②と③が成り立つときは，

(③−②^2)/2 によって①が導かれるので

①かつ② $\Longleftrightarrow$ ②かつ③

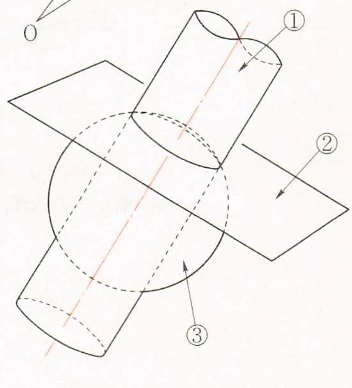
すなわち，曲面①と平面②の交わりは，平面②と球面③の交わりである．



ところで，球③の中心 O(0, 0, 0) から平面②に下した垂線の足をPとすると，

$$\mathrm{OP}=\frac{|k|}{\sqrt{3}},\ \mathrm{P}\left(\frac{k}{3},\ \frac{k}{3},\ \frac{k}{3}\right)$$

となり，OP は球面③の半径より小さいから，②と③はたしかに交わり，したがって曲面①と平面②の交わりは，平面②と球面③の交わりの円である．



この円の中心は，Pであるから，周上の任意の点をQとして

$$(\text{円の半径})^2=\mathrm{QP}^2=\mathrm{OQ}^2-\mathrm{OP}^2$$

$$=\left(\frac{k^2}{3}+2\right)-3\left(\frac{k}{3}\right)^2=2$$

∴　円の半径$=\sqrt{2}$．(k によらず一定)

一方，円の中心Pは，k の値の変化につれて，定直線 $x=y=z$ を描く．

よって，方程式①の表す曲面は

直線 $x=y=z$ を軸とする半径 $\sqrt{2}$ の円柱面 である．

◀無限に伸びる円柱面．

B.159

直線 l：$x=y=z$ と直線 m：$\dfrac{x}{2}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z}{-1}$ 上にそれぞれ点列 P_1，P_2，……，P_n，…… および Q_1，Q_2，……，Q_n，…… があり，すべての n について，線分 P_nQ_n と m とは直交し，線分 Q_nP_{n+1} は l と直交しているとする。

$P_1(a,\ a,\ a)$ とするとき，P_n，Q_n の座標を a，n を用いて表せ。

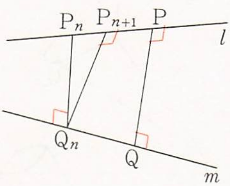
アプローチ 直線 l，m 上の点 P_n，Q_n は，それぞれ一つのパラメタ(媒介変数) s_n，t_n で表せます。

解答 $P_n(s_n,\ s_n,\ s_n)$，$Q_n(2t_n,\ 3t_n+1,\ -t_n)$ …(＊)

とおける．直線 l，m の方向ベクトルとして

$$\vec{l}=(1,\ 1,\ 1),\ \vec{m}=(2,\ 3,\ -1)$$

をとる．



$\overrightarrow{P_nQ_n}=(2t_n-s_n,\ 3t_n-s_n+1,\ -t_n-s_n)$ が $\vec{m}$ と，

$\overrightarrow{Q_nP_{n+1}}=(s_{n+1}-2t_n,\ s_{n+1}-3t_n-1,\ s_{n+1}+t_n)$ が $\vec{l}$ と垂直であるから，

$$\vec{m}\cdot\overrightarrow{P_nQ_n}=0 \cdots ①,\quad \vec{l}\cdot\overrightarrow{Q_nP_{n+1}}=0 \cdots ②$$

①，②を整理して

$$14t_n-4s_n+3=0 \cdots ①',\ 3s_{n+1}-4t_n-1=0 \cdots ②'$$

①′，②′ から t_n を消去して

$a_{n+1}=pa_n+q$ 型の漸化式の処理．

$$s_{n+1}=\frac{8}{21}s_n+\frac{1}{21},\qquad s_{n+1}-\frac{1}{13}=\frac{8}{21}\left(s_n-\frac{1}{13}\right)$$

$$s_n-\frac{1}{13}=\left(\frac{8}{21}\right)^{n-1}\left(s_1-\frac{1}{13}\right)$$

$$\therefore\ s_n=\frac{1}{13}+\left(a-\frac{1}{13}\right)\left(\frac{8}{21}\right)^{n-1} \quad \cdots\cdots\cdots ③$$

①′ に戻って

$$t_n=-\frac{5}{26}+\frac{2}{7}\left(a-\frac{1}{13}\right)\left(\frac{8}{21}\right)^{n-1} \quad \cdots\cdots\cdots ④$$

(＊)に戻って，③，④を代入したものが P_n，Q_n の座標である．

［注］ $n\to\infty$ のとき $s_n\to\dfrac{1}{13}$，$t_n\to-\dfrac{5}{26}$ だから，P_n，Q_n はそれぞれ $P\left(\dfrac{1}{13},\ \dfrac{1}{13},\ \dfrac{1}{13}\right)$，$Q\left(-\dfrac{5}{13},\ \dfrac{11}{26},\ \dfrac{5}{26}\right)$ に収束する(すなわち，限りなく近づく)．このとき，$PQ\perp l$ かつ $PQ\perp m$ となっている．

§2 複素数

□ キー・ワード　（A基礎理論篇）

- 複素数の概念
  - 複素数の四則（和・差・積・商）
  - 共役複素数
- 負の平方根
  - 2 次方程式
    - 解の判別
    - 2 次式の因数分解
- 高次方程式
  - 因数定理
  - 重複解・解の個数
- 複素数平面
  - 極形式 ― 偏角・絶対値
  - 複素数の四則（図形的意味）
  - ド・モアブルの定理
    - 1 の n 乗根
  - 複素数平面上の図形の方程式
    - 内分点・外分点・垂直 2 等分線・円
  - 複素数平面と平面幾何
    - 平行条件・垂直条件

A2.1 複 素 数

I. 複 素 数

方程式

$$x^2=-1$$

を満たす実数は存在しない．そこで，この方程式を満たす新しい数を考え $i=\sqrt{-1}$ と書く．

$$i^2=(\sqrt{-1})^2=-1$$

そして，実数 a，b に対し

$$\alpha=a+bi=a+b\sqrt{-1}$$

と表される数を **複素数** と呼ぶ．b が 0 のとき，

$$\alpha=a+0i=a$$

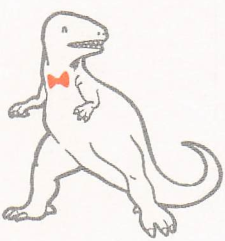
は実数を表す．実数の全体は，複素数の全体に含まれる．実数以外の複素数（$b\neq 0$ なる複素数 $a+bi$）を虚数，特に（$b\neq 0$ のとき）bi なる数を純虚数という．

$a+bi$ が実数 $\Longleftrightarrow$ $b=0$

$a+bi$ が純虚数 $\Longleftrightarrow$ $a=0$，$b\neq 0$

質問です！　いきなり「$x^2=-1$ を満たす数を考えなさい．」と言われても，とまどいます．

答　i は架空の数であって，ネス湖の怪物のように実在しないのではないか，また仮に存在したところで，何の役にも立たないのではないか，と言うのは，もっともな疑問です．



思い出して見て下さい．$x^2=2$ を満たす数は整数の比として表せないので $\sqrt{2}$ と書いたのでした．これは，それまで知っていた有理数の範囲を越えて，無理数と言う新しい数を作ったと考えるべきです．これと同じように，実数の範囲を越えて，「$x^2=-1$ を満たす」を新たに作っても，（それを注意深く扱う限り）何一つ矛盾を引き起こすことはありません．また，A2.4 では，複素数を平面上の点として表現することを学びます．このようにすると，複素数の実在感がぐっと増すことでしょう．

いまや複素数は，数学ばかりでなく，自然科学や工学において大活躍しています．そもそも架空のものである「数」が，このように役に立つということは，考えてみれば不思議なことです．

Ⅱ．2次方程式と複素数

数学Ⅰで学んだように，2次方程式

$$x^2-2x-1=0$$

は，2つの解 $x=1\pm\sqrt{2}$ を持つ．実際，$1\pm\sqrt{2}$ がこの方程式を満たすことは，次のように簡単に確かめられる．

$$\begin{aligned}&(1\pm\sqrt{2})^2-2(1\pm\sqrt{2})-1\\&=1\pm2\sqrt{2}+(\sqrt{2})^2-2(1\pm\sqrt{2})-1\\&=1\pm2\sqrt{2}+2-2(1\pm\sqrt{2})-1\\&=0\end{aligned}$$

それに対し，2次方程式

$$x^2-2x+2=0$$

は解を持たなかった．しかし，上でやった検算と同じ要領で，複素数 $x=1+\sqrt{-1}$ をこの方程式に代入してみると，

$$\begin{aligned}&(1+\sqrt{-1})^2-2(1+\sqrt{-1})+2\\&=1+2\sqrt{-1}+(\sqrt{-1})^2-2(1+\sqrt{-1})+2\\&=1+2\sqrt{-1}-1-2(1+\sqrt{-1})+2\\&=0\end{aligned}$$

となって，方程式は成立する．同様にして，$x=1-\sqrt{-1}$ も方程式を満たすことが分かる．

このように，実数の範囲では解を持たなかった2次方程式が，複素数の範囲に解を持つ可能性があるのである．☞A2.2

Ⅲ．複素数の和，差，積

上記のような複素数の計算の規則を，一般化して整理しておこう．複素数

$$\alpha=a+bi\,(a,\ b\text{ は実数})$$
$$\beta=c+di\,(c,\ d\text{ は実数})$$

に対し，α と β の和，差，積は

$$\alpha+\beta=(a+c)+(b+d)i$$
$$\alpha-\beta=(a-c)+(b-d)i$$
$$\begin{aligned}\alpha\beta&=(a+bi)(c+di)\\&=ac+adi+bci+bdi^2\\&=ac+adi+bci-bd\\&=(ac-bd)+(ad+bc)i\end{aligned}$$

である．(商β/αは，Ⅳで扱う)

複素数 $\alpha=a+bi$ に対し，$\overline{\alpha}=a-bi$ を α の**共役複素数**という．それらの和，差，積は

$$\alpha+\overline{\alpha}=2a$$
$$\alpha-\overline{\alpha}=2bi$$
$$\alpha\overline{\alpha}=a^2+b^2$$

となる．とくに，$\alpha+\overline{\alpha}$ は実数，$\alpha-\overline{\alpha}$ は純虚数，$\alpha\overline{\alpha}$ は実数であり，

$$\begin{cases} \alpha\overline{\alpha}\geqq 0 \\ \alpha\overline{\alpha}=0 \iff a=b=0 \iff \alpha=0 \end{cases}$$

が成り立つ．

質問です！　結局，複素数は $i^2=-1$ という関係に注意しながら，i という文字を含む式として計算すればいいのですね．

答　そのとおりです．そしてこの事情は，$a+b\sqrt{2}$ (a，b は有理数) という形の数どうしの和，差，積を計算するときと全く同じです．この場合，$(\sqrt{2})^2=2$ という関係に注意すればよかったのでした．

IV．1次方程式

α，β を複素数の定数として，複素数の未知数 z に対する方程式

$$\alpha z=\beta \qquad \cdots\cdots\cdots(*)$$

を解こう．ただし，$\alpha\neq 0$ とする．

$(*)$ の両辺に α の共役複素数 $\overline{\alpha}$ をかける．

$$\alpha\overline{\alpha}z=\beta\overline{\alpha}$$

ここで $\alpha\overline{\alpha}$ は実数であり，$\alpha\neq 0$ のもとで $\alpha\overline{\alpha}\neq 0$ だから，両辺にその逆数 $\dfrac{1}{\alpha\overline{\alpha}}$ をかけて

$$z=\frac{\beta\overline{\alpha}}{\alpha\overline{\alpha}}$$

を得る．

質問です！　この問題は要するに β を α で割ればいいのですから，$\alpha=a+bi$，$\beta=c+di$ として，

$$z=\frac{\beta}{\alpha}=\frac{c+di}{a+bi}$$
$$=\frac{(c+di)(a-bi)}{(a+bi)(a-bi)}=\frac{(ac+bd)+(ad-bc)i}{a^2+b^2}$$

というふうにしてもいいでしょうか？

答　このように書いた方が，実際の計算の手続きがはっきりするし，複素数の割算が，数学Ⅰでやった「分母の有理化」と同じ発想であることが分かります．

計算はそれでいいのです．しかし，単に「(＊)を満たす z の値はなにか．」というだけでなく，「(＊)を満たす複素数 z は存在するか？」という，より根本的な問題に答えるためには，いきなり

$$z=\frac{\beta}{\alpha} \qquad \cdots\cdots\cdots (**)$$

としてはいけません．というのは，まだ右辺の意味が確定していないからです．問題は，むしろ右辺の分数の意味を定義することであり，方程式(＊)を満たす複素数 z がただ1つ定まることを確かめた上で，その z を(＊＊)のように書くのです．

V．共役複素数の四則

2つの複素数 α，β に対し，

$$\overline{\overline{\alpha}}=\alpha \qquad \cdots\cdots\cdots ①$$

$$\overline{\alpha\pm\beta}=\overline{\alpha}\pm\overline{\beta} \qquad \cdots\cdots\cdots ②$$

$$\overline{\alpha\beta}=\overline{\alpha}\,\overline{\beta} \qquad \cdots\cdots\cdots ③$$

$$\overline{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)}=\frac{\overline{\beta}}{\overline{\alpha}} \quad (\alpha\neq 0 \text{ とする}) \qquad \cdots\cdots\cdots ④$$

が成立する．①，②の証明は易しい．③を示すために

$$\alpha=a+bi, \qquad \beta=c+di$$

とおくと，

$$\alpha\beta=(ac-bd)+(ad+bc)i$$

$$\overline{\alpha}\,\overline{\beta}=(a-bi)(c-di)=(ac-bd)-(ad+bc)i$$

$$\therefore \quad \overline{\alpha\beta}=\overline{\alpha}\,\overline{\beta}$$

また④は次のようにして示される．方程式

$$\alpha z=\beta$$

を満たす複素数 z を $\dfrac{\beta}{\alpha}$ と書いたことに注意する．③を用いると

$$\overline{\alpha z}=\overline{\alpha}\,\overline{z}=\overline{\beta} \qquad \therefore \quad \overline{z}=\frac{\overline{\beta}}{\overline{\alpha}}$$

これは④を意味する．

また，次の関係が成り立つことも明らかである．複素数 α について

1)　α が実数 $\Longleftrightarrow$ $\overline{\alpha}=\alpha$

2)　α が純虚数 $\Longleftrightarrow$ $\alpha+\overline{\alpha}=0$ かつ $\alpha\neq 0$

A2.2 2次方程式

I．負数の平方根

方程式

$$x^2=-1$$

を満たす複素数は，i のほかに $-i$ がある．

$$i^2=(-i)^2=-1$$

すなわち，-1 の平方根は $\pm i$ である．同様に

$$(\sqrt{5}\,i)^2=(-\sqrt{5}\,i)^2=-5$$

であるから，-5 の平方根は $\pm\sqrt{5}\,i$ である．

一般に，正の数 a に対し

$$(\sqrt{a}\,i)^2=(-\sqrt{a}\,i)^2=-a$$

であるから，負の数 $-a$ の平方根は $\pm\sqrt{a}\,i$ となる．そこで

$$\sqrt{-a}=\sqrt{a}\,i$$

と書く．

質問です！　$\pm i$ 以外に，-1 の平方根はないのですか．

答　我々は複素数という新しい世界にいるのですから，「平方根は二つある」という実数世界の常識を無反省に持ち込んではいけません．これは鋭い指摘です．

しかし，$\pm i$ 以外に $x^2=-1$ を満たす複素数が存在しないことは，次のようにして証明できます．z を任意の複素数として

$$\begin{aligned}(z-i)(z+i)&=z^2-iz+iz-i^2\\&=z^2+1\end{aligned}$$

が成り立つので

$$\begin{aligned}&z^2+1=0\\\Longleftrightarrow\ &(z-i)(z+i)=0\end{aligned}$$

ここで一般に

$$\alpha\beta=0 \Longleftrightarrow \alpha=0 \text{ または } \beta=0$$

ですから（☞B.202）

$$\begin{aligned}&z^2+1=0\\\Longleftrightarrow\ &z-i=0 \text{ または } z+i=0\\\Longleftrightarrow\ &z=i \text{ または } z=-i\end{aligned}$$

となります．同じ理由で，負の数 $-a$ の平方根は $\pm\sqrt{a}\,i$ に限られます．

II．2次方程式

aを実数とする．$a<0$ の場合も含めて，2次方程式

$$x^2=a$$

の解を，$\pm\sqrt{a}$ と書こう．

a，b，c を実数として，2次方程式

$$ax^2+bx+c=0 \qquad \cdots\cdots\cdots(*)$$

を考える．ただし $a\neq 0$ とする．$(*)$は

$$4a^2x^2+4abx+4ac=0$$

$$\therefore\quad (2ax+b)^2=b^2-4ac$$

のように変形できる．よって，

$$D=b^2-4ac$$

の符号に関係なく

$$2ax+b=\pm\sqrt{b^2-4ac}$$

$$\therefore\quad x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

を得る．

III．解の判別

2次方程式

$$ax^2+bx+c=0 \qquad \cdots\cdots\cdots(*)$$

は，

$b^2-4ac>0$ のとき，異なる2実数解をもち，
$b^2-4ac=0$ のとき，実数の重複解をもち，
$b^2-4ac<0$ のとき，異なる2虚数解をもつ．

$D=b^2-4ac$ を判別式と言う．重複解を2個と数えるならば，2次方程式$(*)$は，複素数の範囲に必ず2個の解をもつといえる．

質問です！　$D<0$ のとき，2つの解 $\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ が異なる数だと言うことは，当たり前なのですか．そもそも i と $-i$ は異なる数なのでしょうか．

答　これは意外な面白い問題です．見かけ上の異なる表現が，実は同一の数を表すかも知れないという可能性を指摘しています．

複素数 $a+bi$ と $c+di$ が等しいとしましょう．(a，b，c，d は実数とします．)

$$a+bi=c+di$$

このとき

$$a-c=(d-b)i$$

$$\therefore\quad (a-c)^2=-(d-b)^2$$

となります．a，b，c，d は実数なので，左辺$\geqq 0$，右辺$\leqq 0$，したがって

$$(a-c)^2=(d-b)^2=0$$

$$\therefore\quad a=c \text{ かつ } b=d$$

を得ます．すなわち

$$a+bi=c+di \iff a=c \text{ かつ } b=d$$

が証明されました．そしてこのことから，$i\neq -i$ や，

$$D<0 \Longrightarrow \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\neq\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

が導かれます．

しかし論理的には，複素数どうしが等しいということ（「相等性」と言います）を

$$a+bi=c+di \iff a=c \text{ かつ } b=d$$

によって定義するのだと考えるべきです．相等性を定義しない限り，A2.1 IIIでやった複素数の和，積を与える等式の意味が定まりません．そして，複素数の相等性を上のように定めるときにだけ，「負の数の平方根」という概念が矛盾なく定義されるのです．

IV．因数分解

2 次式 x^2+1 を実数の範囲で 1 次式の積に因数分解することはできないが，複素数の範囲では

$$x^2+1=(x-i)(x+i)$$

のように因数分解できる．一般に，実数 a，b，c に対し（$a\neq 0$ とする），2 次方程式

$$ax^2+bx+c=0$$

の 2 つの（複素数の）解を α，β をすると，

$$ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$$

のように因数分解できる．

ガイド ☞B. 205

A 2.3 高次方程式

I. 次数逓減の原理

x の多項式 $f(x)$ に対し，方程式

$$f(x)=0$$

の解を複素数の範囲で求めることを考える．

$f(x)$ が3次以上の多項式の場合，その具体形をよく見て，方程式の次数を下げる工夫をすることが多い．ここで，次数を下げる原理は，次の定理である．

[定理] x の多項式 $f(x)$ が，二つの多項式 $g(x)$，$h(x)$ を用いて

$$f(x)=g(x)h(x)$$

のように因数分解できるとき，複素数 α が $f(x)=0$ の解であること

$$f(\alpha)=0$$

は

$$g(\alpha)=0 \text{ または } h(\alpha)=0$$

と同値である．この意味で

$$f(x)=0 \Longleftrightarrow g(x)=0 \text{ または } h(x)=0$$

証明：複素数 β，γ に対し，

$$\beta\gamma=0 \Longleftrightarrow \beta=0 \text{ または } \gamma=0$$

であるから (☞ B.202)

$$f(\alpha)=0 \Longleftrightarrow g(\alpha)=0 \text{ または } h(\alpha)=0$$

が成り立つ．∎

質問です！ $g(x)$ と $h(x)$ の次数は，$f(x)$ の次数より低いから，方程式の次数が下がったと言うことですね．それから，$g(x)$ と $h(x)$ の係数は複素数でもいいのですか．

答 $g(x)$ を m 次式，$h(x)$ を k 次式とすると，$f(x)$ は $m+k$ 次式ですから，$g(x)$ と $h(x)$ の次数は，$f(x)$ の次数より低くなります．また，$g(x)$ と $h(x)$ ばかりでなく，$f(x)$ の係数を複素数としても，この定理は成立します．

II．因数定理

方程式の次数を下げるとき，次の定理がしばしば用いられる．

因数定理

> [定理]　x の多項式 $f(x)$，複素数 α に対し，
> $f(\alpha)=0$ が成り立つとき，
> $$f(x)=(x-\alpha)g(x)$$
> のように因数分解できる．ここに，$g(x)$ は x の多項式である．

大学への数学Aニューアプローチ p.12 では，α を実数としてこの定理を証明したが，α は複素数としてよい．念のためその証明を確認しよう．

証明：$f(x)$ を $x-\alpha$ で割った商を $g(x)$，余りを r とすると（多項式の割算は，複素数の範囲でも実数の場合と同様にできる），

$$f(x)=(x-\alpha)g(x)+r$$

これに $x=\alpha$ を代入して

$$f(\alpha)=(\alpha-\alpha)g(\alpha)+r$$

$$\therefore\quad 0=r$$

すなわち，$f(x)$ は $x-\alpha$ で割り切れる．■

III．簡単な高次方程式

方程式

$$x^4+x^3-x-1=0$$

を解こう．

$$f(x)=x^4+x^3-x-1$$

とおくと，$f(1)=0$ であるから，$f(x)$ は $x-1$ で割り切れる．

$$f(x)=(x-1)g(x)$$

実際に割算をして $g(x)$ を求めると

$$g(x)=x^3+2x^2+2x+1$$

となる．さらに $g(-1)=0$ であるから，$g(x)$ は $x+1$ で割り切れる．その商は x^2+x+1 であるから

$$g(x)=(x+1)(x^2+x+1)$$

$$\therefore\quad f(x)=(x-1)(x+1)(x^2+x+1)$$

ここで

$$x^2+x+1=0 \iff x=\frac{-1\pm\sqrt{3}\,i}{2}$$

であるから，$f(x)=0$ の解は

$$x=\pm1,\ \frac{-1\pm\sqrt{3}\,i}{2}$$

である．

Ⅳ．重複解

2次方程式と同様に，3次以上の方程式にも重複解があり得る．多項式 $f(x)$ に対し，複素数 α が

$$f(\alpha)=0 \qquad \cdots\cdots\cdots(*)$$

を満たすとき，因数定理により $f(x)$ は $x-\alpha$ で割り切れるが，その商がさらに $x-\alpha$ で割り切れることもある．$f(x)$ が $(x-\alpha)^m$ で割り切れて

$$f(x)=(x-\alpha)^m g(x)$$

と因数分解され，多項式 $g(x)$ が $x-\alpha$ で割り切れないとき，α は方程式(＊)の **m 重解** であるという．解の数を数えるとき，m 重解は m 個と数え，解を

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_N$$

のように列挙するとき，m 重解は m 回繰り返して書くことにする．

Ⅴ．方程式の解の数

因数定理を繰り返し用いると，次の定理が証明できる．

[定理]　x の多項式 $f(x)$ に対し，

$$f(x)=0$$

が，解 α_1，α_2，……，α_N をもつとすると，

$$f(x)=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots\cdots(x-\alpha_N)g(x)$$

のように因数分解できる．ただし，$g(x)$は x の多項式である．

ガイド　☞B.210 [注] 2°

この定理において，N は $f(x)$ の次数より大きくなれないから，

[定理]　n 次方程式の解は，高々 n 個である．

質問です！　n 次方程式は n 個の解を持つような気がしますが…….
答　一般的な証明は難かしいですが，次の定理が知られています．

[定理]　n 次方程式の解は，ちょうど n 個である．

これを「**代数学の基本定理**」といいます．大切なことは，実数の解だけを見るのではなく，複素数の範囲で解を考えるということです．正確に言うと，「複素数を係数とする n 次方程式は，複素数の範囲にちょうど n 個の解をもつ」となります．(☞C.9)

私達は0と自然数から出発して，1次方程式 $ax+b=0$ を解くために負数と有理数を作り，2次方程式を解くために，無理数と虚数を作って，複素数を得たのですが，その結果，「方程式を解くために，もうこれ以上，数の世界を広げなくてよい」という意味で，完全な数の世界に到達したと言えるでしょう．

A 2.4　複素数平面

I．複素数平面

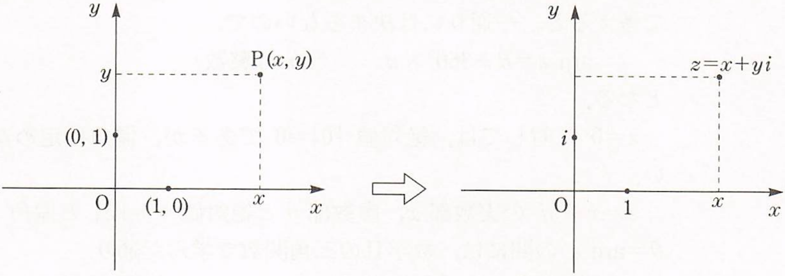
すべての実数が数直線上の点として表されるように，すべての複素数は，次のような規則に従って，平面上の点として表すことができる．

まず，平面上に原点をOとする xy 座標系を考えて，

複素数 $z=x+yi$ に点P$(x,\ y)$を対応させる

ことによって，すべての複素数は平面上の点として表される．

逆に，平面上のすべての点には，対応する複素数が一つ決まる．このように，各点が一つの複素数を表している平面を **複素数平面** というが，この平面に基づいた数学において，偉大な功績を残したガウス (C.F. Gauss) にちなんで，**ガウス平面** ということもある．



[座標平面]　　[複素数平面]

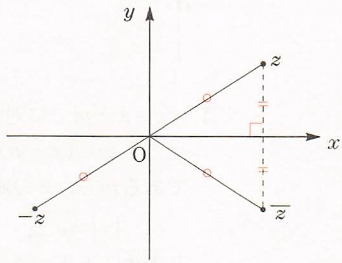
1°　複素数平面上で，複素数 z に対応する点PをP(z) と表すが，z とPを同じものと見なして，簡単に点 z とか，単に z ということもある．

例　原点O(0, 0)，A(1, 0)，B(0, 1) はそれぞれ複素数 $0+0i=0$，$1+0i=1$，$0+1\cdot i=i$ を表すから，複素数平面上では O，A，Bを点0，点1，点 i ということもある．

2°　x 軸上の点 $(x,\ 0)$ は実数 $x=x+0i$ を表し，原点O以外の，y 軸上の点 $(0,\ y)$ は純虚数 $yi=0+yi$ を表すから，x 軸を実数軸，y 軸を虚数軸という．

3°　複素数 $z=x+yi$ と共役な複素数 $\overline{z}=x-yi$ は実軸に関して対称である．

また，z と $-z=-x-yi$ は原点に関して対称である．



II．極形式

0以外の複素数 $z=x+yi$ を表す点をP(z) とする．

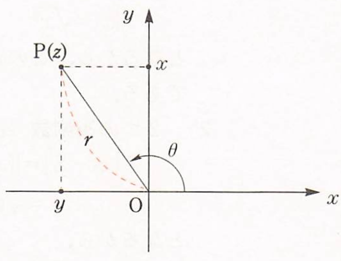
このとき，OPの長さ r を複素数 z の **絶対値** といい，$|z|$ と表す．

つまり，

$$|z|=|x+yi|=r=\sqrt{x^2+y^2}$$

である．

また，線分OPと実数軸の正の部分とのなす角 θ を z の **偏角** (argument) といい，$\arg z$ と表す．



つまり，zの偏角 $\arg z$ とは動径 OP が表す角であり，一般角で考えると，一通りには決まらないので，

$$\arg z = \theta + 360^\circ \times n \qquad (n \text{は整数})$$

となる．

$z=0$ に対しては，絶対値 $|0|=0$ であるが，偏角は定めない．

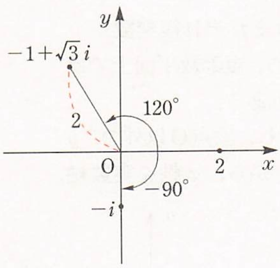
$z=x+yi$ の実数部 x，虚数部 y と絶対値 $r=|z|$ と偏角 $\theta=\arg z$ の間には，数学IIの三角関数で学んだ通り

$$x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta$$

の関係が成り立つから，

$$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$$

と表すことができる．これを，複素数zの **極形式** という．



例　左図より，2，$-i$，$-1+\sqrt{3}\,i$ の極形式は

$$2=2(\cos 0^\circ+i\sin 0^\circ)$$

$$-i=1\cdot\{\cos(-90^\circ)+i\sin(-90^\circ)\}$$

$$=\cos(-90^\circ)+i\sin(-90^\circ)$$

$$-1+\sqrt{3}\,i=2(\cos 120^\circ+i\sin 120^\circ)$$

であることがわかる．

1°　$z=x+yi$　に対して，

$$z\bar{z}=(x+yi)(x-yi)=x^2+y^2=|z|^2$$

であるから，zの絶対値 $|z|$ を

$$|z|=\sqrt{z\bar{z}}$$

と表すこともできる．

特に，実数 $x=x+0i$ に対して

$$|x|=\sqrt{x^2}$$

となるから，このときには，中学校で学んだ実数の絶対値と同じである．

2°　2つの複素数 $z_1=x_1+y_1i$，$z_2=x_2+y_2i$ に対して，

$$|z_2-z_1|=|(x_2-x_1)+(y_2-y_1)i|$$

$$=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

となるから，

$$|z_2-z_1|=[\text{点 } z_1 \text{ と点 } z_2 \text{ の距離}]$$

という関係が成り立つ．

3°　$z=x+yi$，$\overline{z}=x-yi$ と $-z=-x-yi$ の絶対値に関しては，

$$|z|=|\overline{z}|=|-z|,$$

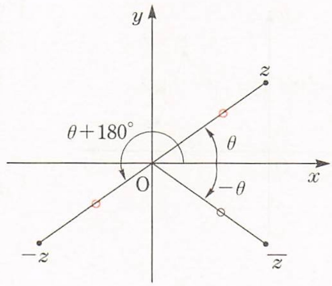
偏角に関しては

$$\arg\overline{z}=-\arg z+360^\circ\times m,$$

$$\arg(-z)=\arg z+180^\circ+360^\circ\times n$$

（m，n は整数）

が成り立つ．



A2.5　複素数平面と複素数の四則

2つの複素数 z_1，z_2 の和 z_1+z_2，差 z_1-z_2，積 z_1z_2，商 $\dfrac{z_1}{z_2}$ の計算は A2.1 で学んだ通りであるから，ここでは，複素数平面上において，これらの位置関係を調べてみよう．

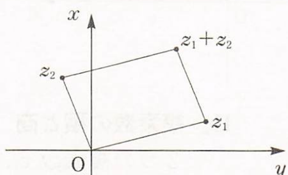
Ⅰ．複素数の和と差

2つの複素数 $z_1=x_1+y_1i$，$z_2=x_2+y_2i$ の和 z_1+z_2 は

$$z_1+z_2=(x_1+x_2)+(y_1+y_2)i$$

であり，A1.4 で示した通り2つのベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}_1}=(x_1,\ y_1)$，$\overrightarrow{\mathrm{OP}_2}=(x_2,\ y_2)$ の和 $\overrightarrow{\mathrm{OP}_1}+\overrightarrow{\mathrm{OP}_2}=(x_1+x_2,\ y_1+y_2)$ との関連から，次のことがわかる．

4点 O，z_1，z_1+z_2，z_2 は平行四辺形をつくる．

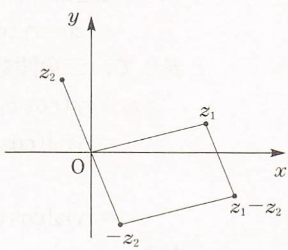


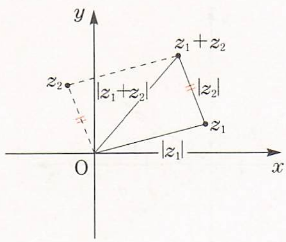
次に，差 z_1-z_2 に関しては，

$$z_1-z_2=z_1+(-z_2)$$

と表すと，次のことがわかる．

4点 O，z_1，z_1-z_2，$-z_2$ は平行四辺形をつくる．





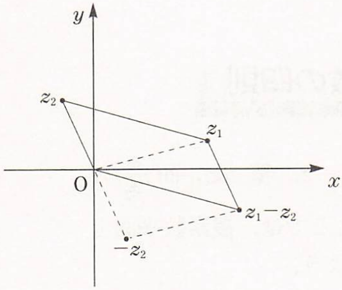
1°　3点O，z_1，z_1+z_2 を頂点とする三角形の3辺の長さは $|z_1|$，$|z_2|$，$|z_1+z_2|$ であるから，

$$||z_1|-|z_2||\leqq|z_1+z_2|\leqq|z_1|+|z_2|$$

（三角不等式）

が成り立つ．

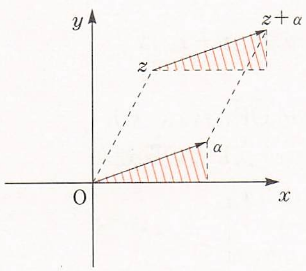
等号が成り立つのは，三角形がつぶれるとき，つまり3点O，z_1，z_2 が一直線上に並ぶときである．



2°　4点O，z_1-z_2，z_1，z_2 は平行四辺形を作るから，

［点 z_1 と点 z_2 の距離］
＝［原点Oと点 z_1-z_2 の距離］
$=|z_1-z_2|$

が成り立つことが，図形的にも確かめられる．



3°　複素数 $z=x+yi$ に複素数 $\alpha=a+bi$ を加えた和

$$z+\alpha=(x+a)+(y+b)i$$

は，z を実数軸方向に a だけ，虚数軸方向に b だけ平行移動した点である．

このような移動を

複素数 $\boldsymbol{\alpha=a+bi}$ だけの平行移動

という．

II．複素数の積と商

2つの複素数 z_1，z_2 の積と商に関しては，極形式を利用すると，図形的意味がよくわかる．

z_1，z_2 を極形式で

$$z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1),\quad z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$$

と表して，三角関数の加法定理を利用すると

$$\begin{aligned}z_1z_2&=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)\cdot r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)\\&=r_1r_2\{(\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2)\\&\qquad\qquad+i(\sin\theta_1\cos\theta_2+\cos\theta_1\sin\theta_2)\}\\&=r_1r_2\{\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)\}\end{aligned}$$

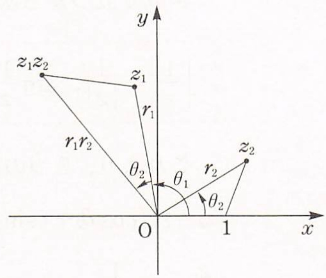
となる．

この計算から，z_1z_2 の絶対値は r_1r_2 であり，偏角の一つは $\theta_1+\theta_2$ であることがわかり，

$$|z_1z_2|=|z_1|\cdot|z_2| \quad \cdots\cdots\cdots ①$$
$$\arg z_1z_2=\arg z_1+\arg z_2+360°\times n \quad (n\text{は整数}) \cdots\cdots\cdots ②$$

とまとめることができる．

さらに，複素数平面上では，原点O(0)を中心として，z_1 を角 $\theta_2=\arg z_2$ だけ回転し，さらに $r_2=|z_2|$ 倍に相似拡大した点が z_1z_2 であることを意味する．したがって，3点O，z_1，z_1z_2 を頂点とする三角形△Oz_1(z_1z_2) と3点O，1，z_2 を頂点とする三角形△O1z_2 は同じ向きで，相似である．



$$\triangle Oz_1(z_1z_2) \backsim \triangle O1z_2 \quad (\text{同じ向き})$$

1°　①，②は標語的に，2つの複素数において

　　　〝積の絶対値は絶対値の積，積の偏角は偏角の和〟

　に等しい，とまとめられる．

2°　①で，$z_1=z_2=z$ とすると，$|z^2|=|z|^2$ となり，次に $z_1=z$，$z_2=z^2$ とおくと $|z^3|=|z\cdot z^2|=|z|\cdot|z^2|=|z|^3$ となるから，一般に次のことが成り立つ．

n を正の整数とするとき，$|z^n|=|z|^n$

3°　$r_2=|z_2|=1$ のときには，z_1z_2 は原点Oを中心として，z_1 を角 $\theta_2=\arg z_2$ だけ回転した点ということになるから

$\alpha=\cos\varphi+i\sin\varphi$ とするとき，
αz は原点Oを中心として，z を角 φ だけ回転した点である．

といえる．

　特に

$iz=(\cos 90°+i\sin 90°)z$，$-iz=\{\cos(-90°)+i\sin(-90°)\}z$

は，原点Oを中心として，z をそれぞれ $90°$，$-90°$ だけ回転した点である．

複素数 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ $(z\neq 0)$ の逆数 $\dfrac{1}{z}$ に対して，

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{r(\cos\theta+i\sin\theta)}=\frac{\cos\theta-i\sin\theta}{r(\cos\theta+i\sin\theta)(\cos\theta-i\sin\theta)}$$
$$=\frac{1}{r}\{\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)\}$$

が成り立つから次のことがわかる．

$$\left|\frac{1}{z}\right|=\frac{1}{|z|},\quad \arg\frac{1}{z}=-\arg z+360^\circ\times n \ (n\text{は整数}) \quad \cdots\cdots③$$

これより，2 つの複素数 $z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)$，
$z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$ $(z_2\neq 0)$ の商 $\dfrac{z_1}{z_2}$ は，

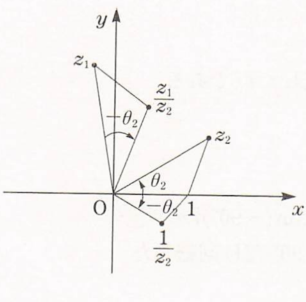
$$\frac{z_1}{z_2}=z_1\cdot\frac{1}{z_2}=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)\cdot\frac{1}{r_2}\{\cos(-\theta_2)+i\sin(-\theta_2)\}$$
$$=\frac{r_1}{r_2}\{\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)\}$$

と表されるから

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|} \quad \cdots\cdots\cdots④$$
$$\arg\frac{z_1}{z_2}=\arg z_1-\arg z_2+360^\circ\times n \ (n\text{は整数}) \quad \cdots\cdots\cdots⑤$$

とまとめることができる．

注意　偏角に関する関係式において，$360^\circ\times n$ に相当する部分を省略して表すこともある．その様な式を見たときには，360° の整数倍を加えて考えることが必要となる．



さらに，複素数平面上では，原点Oを中心として，z_1 を角 $-\theta_2=-\arg z_2$ だけ回転し，さらに $\dfrac{1}{r_2}=\dfrac{1}{|z_2|}$ 倍に相似拡大した点が $\dfrac{z_1}{z_2}$ であることを意味する．したがって，3 点 O，z_1，$\dfrac{z_1}{z_2}$ を頂点とする三角形△O$z_1\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)$ と 3 点 O，1，$\dfrac{1}{z_2}$ を頂点とする三角形△O1$\left(\dfrac{1}{z_2}\right)$ は同じ

向きで，相似である．この他にも，3点O，z_2，1を頂点とする三角形△$Oz_2 1$も同じ向きに相似である．

$$\triangle Oz_1\left(\frac{z_1}{z_2}\right) \backsim \triangle O1\left(\frac{1}{z_2}\right) \backsim \triangle Oz_2 1 \quad \text{（同じ向き）}$$

4°　④，⑤は標語的に，2つの複素数において
〝商の絶対値は絶対値の商，商の偏角は偏角の差〞
に等しいとまとめられる．

A 2.6　ド・モアブルの定理

Ⅰ．ド・モアブルの定理

A2.5における複素数の積と商の計算と同様に，三角関数の加法定理を繰り返し適用すると，

> ［定理］　ド・モアブル（de Moivre）の定理
> nを整数とするとき
> $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$　………①

が証明できる．その証明は，数学Bのすべての教科書に載っているので，ここでは省略する．

例　$\left(\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^{12} = (\cos 30° + i\sin 30°)^{12} = \cos 12\times 30° + i\sin 12\times 30°$

$= \cos 360° + i\sin 360° = 1$

$$(1+i)^{20} = \left\{\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)\right\}^{20}$$
$$= \{\sqrt{2}(\cos 45° + i\sin 45°)\}^{20}$$
$$= \sqrt{2}^{\,20}(\cos 900° + i\sin 900°)$$
$$= 2^{10}(\cos 180° + i\sin 180°)$$
$$= -2^{10} = -1024$$

Ⅱ．1のn乗根

nを自然数とするとき，方程式

$$z^n = 1$$

を満たす複素数 z を **1 の n 乗根**という．

たとえば，

$$z^2=1 \text{ つまり } (z-1)(z+1)=0$$

より，1 の 2 乗根（平方根）は 1 と -1 の 2 個である．

また，

$$z^3=1 \text{ つまり } (z-1)(z^2+z+1)=0$$

より，1 の 3 乗根（立方根）は 1 と $\dfrac{-1\pm\sqrt{3}\,i}{2}$ の 3 個である．

$\omega=\dfrac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}=\cos 120°+i\sin 120°$ とおくと

$\omega^2=\dfrac{-1-\sqrt{3}\,i}{2}=\cos 240°+i\sin 240°$ となるから，1 の 3 乗根は 1，ω，ω^2 で，これらは複素数平面上の，原点を中心とする単位円に内接する正三角形の頂点となっている．

さらに，

$$z^4=1 \text{ つまり } (z-1)(z+1)(z^2+1)=0$$

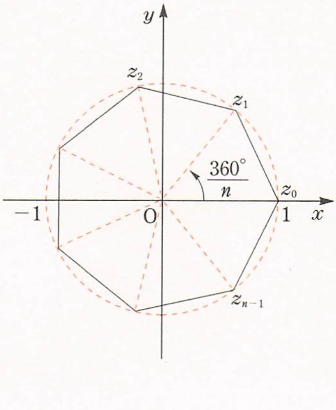
より，1 の 4 乗根は ± 1 と $\pm i$ の 4 個であり，これらはやはり，単位円に内接する正方形の 4 頂点になっている．

一般に，1 の n 乗根を，極形式 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ で求めると，

$$\{r(\cos\theta+i\sin\theta)\}^n=1$$
$$r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)=1$$

より

$$r^n=1,\ \ n\theta=360°\times k \qquad (k \text{ は整数})$$
$$r=1,\ \ \theta=\frac{360°}{n}\times k$$



となる．この中で，互いに異なる z は，

$$k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n-1$$

に対応する n 個の複素数

$$z_k=\cos\left(\frac{360°}{n}\times k\right)+i\sin\left(\frac{360°}{n}\times k\right)$$

だけである．

結局，1 の n 乗根は，ここに示した z_0，z_1，z_2，…，z_{n-1} の n 個であり，これらは，原点 O を中心とする単位円上にあり，1 を一つの頂点とする正 n 角形の頂点となっている．

1°　1の n 乗根 $\cos\left(\frac{360^\circ}{n}\times k\right)+i\sin\left(\frac{360^\circ}{n}\times k\right)$ において，たとえば，$k=n+1$ に対応するものは

$$\cos\left\{\frac{360^\circ}{n}\times(n+1)\right\}+i\sin\left\{\frac{360^\circ}{n}\times(n+1)\right\}$$

$$=\cos\left(\frac{360^\circ}{n}+360^\circ\right)+i\sin\left(\frac{360^\circ}{n}+360^\circ\right)$$

$$=\cos\frac{360^\circ}{n}+i\sin\frac{360^\circ}{n}$$

であり，$k=1$ に対応するものに等しい．同様に，

$k=k_0$ と $k=k_0+n$ に対応するものどうしは等しいことが確かめられる．

したがって，1の相異なる n 乗根は $k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n-1$ に対応する n 個に限られる．

2°　$\omega_n=\cos\frac{360^\circ}{n}+i\sin\frac{360^\circ}{n}$ とおくと，1の n 乗根 $z_0,\ z_1,\ z_2,\ \cdots,\ z_{n-1}$ は

$$z_0=1=\omega_n{}^0,\ z_1=\omega_n{}^1,\ z_2=\omega_n{}^2,\ \cdots\cdots,\ z_{n-1}=\omega_n{}^{n-1}$$

と表されるから，

$z_1,\ z_2,\ \cdots,\ z_{n-1}$ は原点Oを中心として，$z_0=1$ を $\frac{360^\circ}{n}$ ずつ繰り返し回転するとき，順に得られる点であることがわかる．

一般の複素数 $\alpha=r_0(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ に対して，方程式

$$z^n=\alpha$$

を満たす複素数 z を **α の n 乗根** という．

α の n 乗根の一つは

$$\zeta=\sqrt[n]{r_0}\left(\cos\frac{\varphi}{n}+i\sin\frac{\varphi}{n}\right)$$

であるが，α の n 乗根もやはりちょうど n 個あって，それらは ζ と1の n 乗根 z_k $(k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n-1)$ を用いて

$$\zeta z_0=\zeta,\ \zeta z_1,\ \zeta z_2,\ \cdots,\ \zeta z_{n-1}$$

と表される．

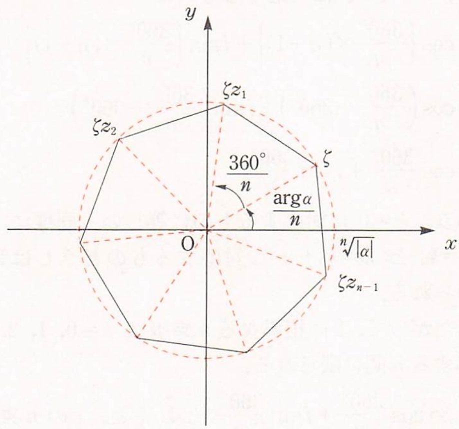
3°　α の n 乗根の絶対値はすべて $\sqrt[n]{r_0}=\sqrt[n]{|\alpha|}$ であり，偏角は

$$\arg\zeta z_k=\frac{\varphi}{n}+\frac{360^\circ}{n}\times k=\frac{\arg\alpha+360^\circ\times k}{n}$$

$$(k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n-1)$$

である．

4°　α の n 乗根は，複素数平面上で，原点Oを中心とする半径 $\sqrt[n]{|\alpha|}$ の円周に内接する正 n 角形の頂点になっている．



A2.7 複素数平面上の図形の方程式

I．内分点，外分点

ベクトルの場合と同様に，次のことが成り立つ．

> 相異なる2点 z_1，z_2 を結ぶ線分を $m:n$ に
> 内分する点は $\dfrac{nz_1+mz_2}{m+n}$，外分する点は $\dfrac{-nz_1+mz_2}{m-n}$
> である．

1°　相異なる2点 z_1，z_2 を結ぶ線分を $1-t:t\ (0 \leqq t \leqq 1)$ に内分する点 z は

$$z=tz_1+(1-t)z_2 \qquad \cdots\cdots\cdots ①$$

である．

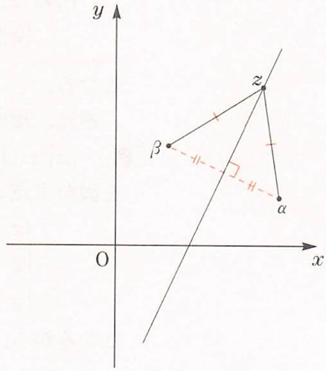
逆に，実数 t に対して，①で表される点 z は，2点 z_1，z_2 を結ぶ直線上にある．

これらはA1.6と同様に示される．☞ A1.6，B.101

2°　3点 z_1，z_2，z_3 を頂点とする三角形 $\triangle z_1z_2z_3$ の重心は $\dfrac{z_1+z_2+z_3}{3}$ である．

Ⅱ．垂直２等分線

相異なる2点 α, β を結ぶ線分の垂直2等分線は，α と β からの距離が等しい点の全体であると考えると，その方程式は



> 2点 α, β を結ぶ線分の垂直2等分線
> $$|z-\alpha|=|z-\beta| \quad \cdots\cdots\cdots ②$$

と表される．

3°　②より

$$|z-\alpha|^2=|z-\beta|^2$$
$$(z-\alpha)(\overline{z}-\overline{\alpha})=(z-\beta)(\overline{z}-\overline{\beta})$$

これを整理すると

$$(\overline{\beta}-\overline{\alpha})z+(\beta-\alpha)\overline{z}+|\alpha|^2-|\beta|^2=0$$

となる．

ここで，$r=\beta-\alpha$, $p=|\alpha|^2-|\beta|^2$ とおくと

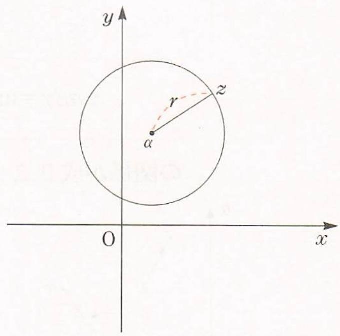
> 直線の方程式の一般形
> $$\overline{r}z+r\overline{z}+p=0 \quad \cdots\cdots\cdots ③ \quad (p \text{ は実数})$$

となる．

逆に，複素数平面上の直線はすべて，③の形で表される．

Ⅲ．円

点 α を中心とする半径 r の円は，α との距離が r である点の全体だから，その方程式は



> 点 α を中心とする半径 r の円
> $$|z-\alpha|=r \quad \cdots\cdots\cdots ④$$

である．

4°　④の代りに，

$$|z-\alpha|^2=r^2$$
$$(z-\alpha)(\overline{z}-\overline{\alpha})=r^2$$
$$|z|^2-\overline{\alpha}z-\alpha\overline{z}+|\alpha|^2-r^2=0$$

と表すこともできる．

ここで，$c=|\alpha|^2-r^2$ とおくと

円の方程式の一般形

$$|z|^2-\overline{\alpha}z-\alpha\overline{z}+c=0 \quad \cdots\cdots ⑤ \quad (c\text{ は実数})$$

となる．

逆に，複素数平面上の円はすべて，⑤の形で表される．

例　$|z|^2-(1-i)z-(1+i)\overline{z}-1=0$

を満たす点 z の描く図形は，この式を変形すると

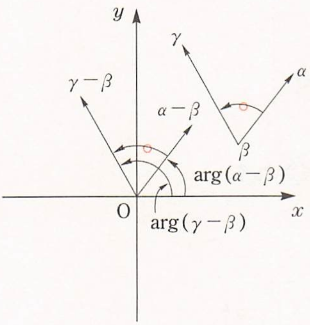
$$\{z-(1+i)\}\{\overline{z-(1+i)}\}-(1+i)(\overline{1+i})-1=0$$

$$|z-(1+i)|^2=3$$

$$|z-(1+i)|=\sqrt{3}$$

となるから，$1+i$ を中心とする半径 $\sqrt{3}$ の円である．

A 2.8　複素数平面と平面幾何

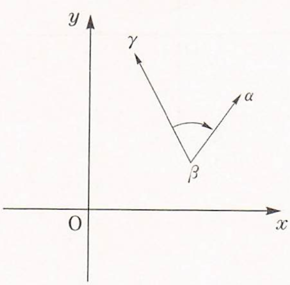


相異なる 3 つの複素数 α, β, γ において，β から α，β から γ に向かう線分を，ベクトルの記号を借りて，それぞれ $\overrightarrow{\beta\alpha}$，$\overrightarrow{\beta\gamma}$ と表し，$\overrightarrow{\beta\alpha}$ から $\overrightarrow{\beta\gamma}$ までの向きのついた角を $\angle\alpha\beta\gamma$ と表すことにする．

図からわかるように，$\angle\alpha\beta\gamma$ は O から $\alpha-\beta$，に向かう線分 $\overrightarrow{\mathrm{O}(\alpha-\beta)}$ から，O から $\gamma-\beta$ に向かう線分 $\overrightarrow{\mathrm{O}(\gamma-\beta)}$ までの向きのついた角 $\angle(\alpha-\beta)\mathrm{O}(\gamma-\beta)$ に等しいから

$$\angle\alpha\beta\gamma=\arg(\gamma-\beta)-\arg(\alpha-\beta)=\arg\frac{\gamma-\beta}{\alpha-\beta}$$

の関係が成り立つ．



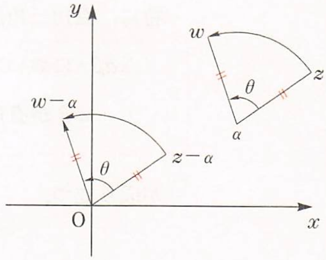
1°　この角の記号では，$\angle\gamma\beta\alpha$ は $\overrightarrow{\beta\gamma}$ から $\overrightarrow{\beta\alpha}$ までの向きのついた角を表すから，

$$\angle r\beta\alpha=-\angle\alpha\beta r$$

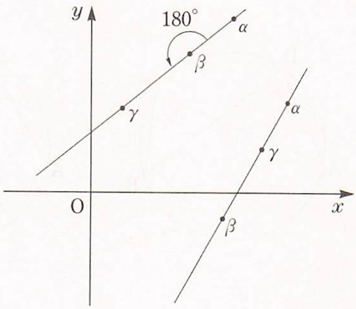
の関係が成り立つ．このように，複素数平面では，角にはつねに向きがあるので，注意が必要である．

2°

> 　複素数 α を中心として，z を角 θ だけ回転した点を w とするとき
>
> $w-\alpha=(z-\alpha)(\cos\theta+i\sin\theta)$
>
> $\dfrac{w-\alpha}{z-\alpha}=\cos\theta+i\sin\theta$



　右図からわかる通り，原点を中心として $z-\alpha$ を角 θ だけ回転した点が $w-\alpha$ であることから，上の関係が導かれる．



3°　相異なる3点 α，β，γ が同一直線上にあるとき，

$$\angle\alpha\beta\gamma=0^\circ \text{ または } 180^\circ$$

つまり

$$\arg\frac{\gamma-\beta}{\alpha-\beta}=0^\circ \text{ または } 180^\circ$$

であるから，

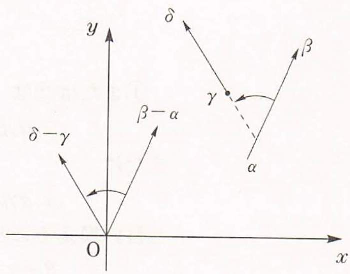
> 3点 α，β，γ が同一直線上にある $\Longleftrightarrow$ $\dfrac{\gamma-\beta}{\alpha-\beta}$ が実数である

が成り立つ．

　この事実からも，α，β を結ぶ直線上に点 z があるための条件は t を実数として

$$\frac{z-\beta}{\alpha-\beta}=t \text{ つまり } z=t\alpha+(1-t)\beta$$

と表されることであるとわかる．



4°　相異なる4点 α，β，γ，δ において，$\overrightarrow{\alpha\beta}$ から $\overrightarrow{\gamma\delta}$ までの角は $\overrightarrow{\mathrm{O}(\beta-\alpha)}$ から $\overrightarrow{\mathrm{O}(\delta-\gamma)}$ までの角つまり $\arg\dfrac{\delta-\gamma}{\beta-\alpha}$ に等しいから，次のことが成り立つ．

> $\overrightarrow{\alpha\beta}$ と $\overrightarrow{\gamma\delta}$ が平行である $\Longleftrightarrow$ $\dfrac{\delta-\gamma}{\beta-\alpha}$ は実数である．
>
> $\overrightarrow{\alpha\beta}$ と $\overrightarrow{\gamma\delta}$ が垂直である $\Longleftrightarrow$ $\dfrac{\delta-\gamma}{\beta-\alpha}$ が純虚数である．

特に，直角三角形に関して

> $\triangle\alpha\beta\gamma$ において
>
> $\angle\beta$ が直角である $\Longleftrightarrow$ $\dfrac{\gamma-\beta}{\alpha-\beta}$ が純虚数である

が成り立つ．

5°　平面上の相異なる 4 点 A, B, C, D が同一円周上にあるときには，4 点の並び方によって

$\angle ACB=\angle ADB$　…… ①

または

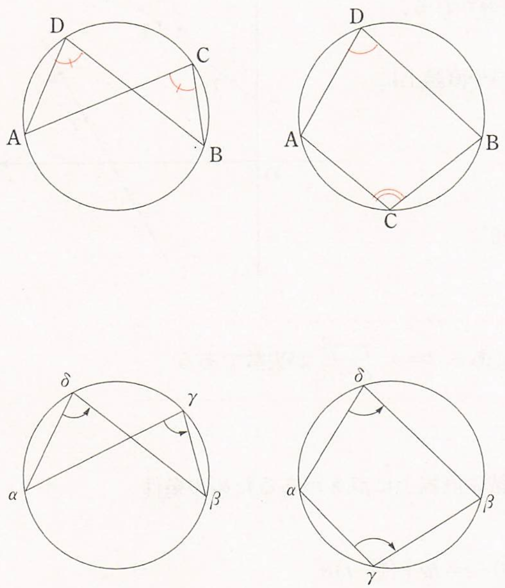
$\angle ACB+\angle ADB=180°$

…… ②

のいずれか成り立つ．

複素数平面上の相異なる 4 点 α, β, γ, δ について同じことを考えるときには，角に向きがあることに注意しなければならない．

α, β に関して γ, δ が同じ弧にあるときには，$\angle\alpha\gamma\beta$ と $\angle\alpha\delta\beta$ は同じ向きであり，γ, δ が異なる弧にあるときには $\angle\alpha\gamma\beta$ と $\angle\alpha\delta\beta$ は逆向きであるから，



①または②は

$$\angle\alpha\gamma\beta=\angle\alpha\delta\beta$$

または

$$\angle\alpha\gamma\beta-\angle\alpha\delta\beta=\pm180°$$

と言い換えることができ，さらに

$$\arg\frac{\beta-\gamma}{\alpha-\gamma}-\arg\frac{\beta-\delta}{\alpha-\delta}=0° \text{ または } \pm180° \quad \cdots\cdots ③$$

と言い換えることができる．

4点 α，β，γ，δ が同一直線上にあるときにも，③が成り立つから，次の様にまとめることができる．

4点 α，β，γ，δ が同一円周または同一直線上にある

$\Longleftrightarrow$ $\dfrac{\beta-\gamma}{\alpha-\gamma}\Big/\dfrac{\beta-\delta}{\alpha-\delta}$ が実数である．

―― A2 おわり ――



B.201

次のおのおのの方程式を解け．

(1)　$z-(3-2i)=-1+i$

(2)　$-iz+(-2+3i)(z+1)=(1+i)^2$

(3)　$\begin{cases}(1+2i)z+w=1\\-z+iw=2-i\end{cases}$

アプローチ　複素数についての１次方程式です．一般に，１次方程式については，係数や未知数が複素数の場合も，実数の場合と同じ方法で解くことができます．それは１次方程式の解法に使われる原理：

‘$A=B$ かつ $B=C \Longrightarrow A=C$’ などの等式の性質

‘$A=B \Longrightarrow A+C=B+C$’ などの等式の変形規則

が，複素数の世界でも，実数の世界と同様に成立しているからです．

移項 ▶ **解答**　**(1)**　$z=(-1+i)+(3-2i)$

$=\mathbf{2-i}$

(2)　$-iz+(-2+3i)z+(-2+3i)=1+2i+(-1)$

∴　$(-2+2i)z=2i-(-2+3i)$

∴　$2(-1+i)z=2-i$

分子・分母に $1-i$ をかけて分母を実数にする． ▶

☞ A2.1III

∴　$z=\dfrac{2-i}{2(-1+i)}=\dfrac{(2-i)(-1-i)}{2(-1+i)(-1-i)}$

$=\dfrac{-3-i}{4}=-\dfrac{3}{4}-\dfrac{1}{4}i$

(3)　上の式を①，下の式を②とおく．

通常の「加減法」と同じ． ▶

①×i−② を作ると，w が消去されて

$i(1+2i)z+z=i-(2-i)$

∴　$(-1+i)z=-2+2i$

を得る．これより

$\mathbf{z=2}$

である．

これを①に代入して

$2+4i+w=1$

∴　$w=\mathbf{-1-4i}$

を得る．

B. 202

2つの複素数 α, β に対し

$$\alpha\beta=0 \iff \alpha=0 \text{ または } \beta=0$$

を示せ.

アプローチ $\alpha=x+yi$, $\beta=u+vi$ とおいて, $\alpha\beta$ を計算してみましょう. それが0に等しいとは, どういうことでしょうか.

解答 $\alpha=x+yi$, $\beta=u+vi$ とおくと

$$\alpha\beta=(x+yi)(u+vi)$$
$$=(xu-yv)+(xv+yu)i$$

よって

$$\alpha\beta=0 \iff \begin{cases} xu-yv=0 & \cdots\cdots\cdots ① \\ xv+yu=0 & \cdots\cdots\cdots ② \end{cases}$$

◁ x, y について解く.

①×u+②×v, $-v$×①+u×② を作ると,

$$\begin{cases} (u^2+v^2)x=0 \\ (u^2+v^2)y=0 \end{cases}$$

これは

$$u^2+v^2\neq 0 \Longrightarrow x=y=0$$
$$\therefore \quad \beta\neq 0 \Longrightarrow \alpha=0$$
$$\therefore \quad \alpha=0 \text{ または } \beta=0$$

を意味する. ■

別解 $\alpha\beta=0$ とすると

$$|\alpha\beta|=0 \qquad \therefore \quad |\alpha||\beta|=0$$

◁ $|\alpha\beta|=|\alpha||\beta|$

よって $|\alpha|=0$ または $|\beta|=0$. すなわち,
$\alpha=0$ または $\beta=0$ を得る. ■

◁ 実数 a, b に関して $ab=0 \iff a=0$ または $b=0$ を前提としている.

[注] 「$\alpha\neq 0$ のときは $\dfrac{1}{\alpha}$ が存在する」ことを利用してよいとすれば

「$\alpha\neq 0$ ならば, $\alpha\beta=0$ の両辺に $\dfrac{1}{\alpha}$ をかけて, $\beta=0$ を得る. よって

$\alpha\beta=0$ ならば ($\alpha=0$ または $\beta=0$).

一方, 逆は明らか」と証明ができる.

B.203

2 次方程式

$$z^2-6z+13=0 \qquad \cdots\cdots \text{①}$$

を考える．

(1) $z=3\pm 2i$ は①を満たすことを示せ．

(2) $z=3\pm 2i$ 以外に①を満たす複素数は存在しないことを示せ．

アプローチ (2)「2 次方程式だから，解は 2 つしかない」というのでは理由になりません．この“常識”を確かめるのが目的です．

解答 (1) $z=3\pm 2i$ を①の左辺に代入する．

$$(3\pm 2i)^2-6(3\pm 2i)+13$$
$$=5\pm 12i-18\mp 12i+13=0 \quad ■$$

こういう z の 2 次式を考える．

(2) $(z-3-2i)(z-3+2i)$

$$=(z-3)^2-(2i)^2=z^2-6z+9+4$$
$$=z^2-6z+13$$

よって

$$z^2-6z+13=0$$
$$\Longleftrightarrow (z-3-2i)(z-3+2i)=0$$

☞ B.202

$$\Longleftrightarrow z-3-2i=0 \text{ または } z-3+2i=0$$
$$\Longleftrightarrow z=3\pm 2i \quad ■$$

B.204

k を実数の定数として，2 次方程式

$$z^2+(k-3)z-(2k^2-3)=0 \qquad \cdots\cdots \text{①}$$

を考える．

(1) $k=0$ のとき，①の解を求めよ．

(2) ①の解を求めよ．

(3) ①が虚数解をもつ条件を求めよ．

アプローチ 解の公式 (A2.1II) を使います．

解答 (1) $k=0$ のとき，①は

$$z^2-3z+3=0$$

となるから，

$$z=\frac{3\pm\sqrt{9-4\cdot 3}}{2}=\frac{3\pm\sqrt{-3}}{2}=\boldsymbol{\frac{3\pm\sqrt{3}\,i}{2}}$$

（２）　$z=\dfrac{-(k-3)\pm\sqrt{(k-3)^2+4(2k^2-3)}}{2}$

$=\dfrac{\boldsymbol{-k+3\pm\sqrt{9k^2-6k-3}}}{\boldsymbol{2}}$

（３）　(2)で求めた解が虚数であるための条件は

$9k^2-6k-3<0$　　◀ $D=9k^2-6k-3$ は判別式

$\therefore$　$(3k+1)(k-1)<0$

$\therefore$　$\boldsymbol{-\dfrac{1}{3}<k<1}$ である．

B.205

a，b，c を実数として，２次方程式

$az^2+bz+c=0$　………　①

の２つの解を α，β とする．ただし $a\neq0$．

(1)　$\alpha+\beta$，$\alpha\beta$ を求めよ．

(2)　①の左辺は

$az^2+bz+c=a(z-\alpha)(z-\beta)$　………　②

のように因数分解できることを示せ．

アプローチ　(1)　解の公式から導かれる関係 $\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}$，$\alpha\beta=\dfrac{c}{a}$ を解と係数の関係と言います．これを用いて(2)を示して下さい．

解答　（１）　解の公式により，

$\alpha=\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$，$\beta=\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

よって，$\alpha+\beta=\boldsymbol{-\dfrac{b}{a}}$

$\alpha\beta=\dfrac{1}{4a^2}(-b+\sqrt{b^2-4ac})(-b-\sqrt{b^2-4ab})$　　◀ 和と差の積

$=\dfrac{1}{4a^2}(b^2-(b^2-4ac))=\dfrac{4ac}{4a^2}=\boldsymbol{\dfrac{c}{a}}$

（２）　$b=-a(\alpha+\beta)$，$c=a\alpha\beta$ であるから，

$az^2+bz+c=az^2-a(\alpha+\beta)z+a\alpha\beta$

$=\boldsymbol{a(z-\alpha)(z-\beta)}$

［注］　因数定理の論法を用いて直接(2)を証明することもできる．

☞ B.210

②の両辺の係数を比較すると，(1)が得られる．

B. 206

$x^2-7x+15=0$ の解を α，β とするとき，

(1) $\dfrac{\alpha^2}{\beta}+\dfrac{\beta^2}{\alpha}$ の値を求めよ．

(2) $\dfrac{\alpha^2}{\beta}$，$\dfrac{\beta^2}{\alpha}$ を解とする x の 2 次方程式を作れ．

アプローチ α，$\beta=\dfrac{7\pm\sqrt{11}\,i}{2}$ を直接代入するよりも，はるかに簡単な方法があります．代入すべき $\dfrac{\alpha^2}{\beta}+\dfrac{\beta^2}{\alpha}$ が α と β の対称式(α，β を交換しても，元と変わらない式)であるからです！

解答 (1) 2 次方程式の解と係数の関係より

$$\begin{cases}\alpha+\beta=7\\ \alpha\beta=15\end{cases}$$

である．

このことを踏まえ，問題の式を $\alpha+\beta$ と $\alpha\beta$ とで表すと

$$\frac{\alpha^2}{\beta}+\frac{\beta^2}{\alpha}=\frac{\alpha^3+\beta^3}{\alpha\beta}$$

$$=\frac{(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)}{\alpha\beta}$$

となるので，求める式の値は，

$$\frac{7^3-3\cdot15\cdot7}{15}=\mathbf{\frac{28}{15}}$$

である．

(2) 上で $\dfrac{\alpha^2}{\beta}$ と $\dfrac{\beta^2}{\alpha}$ の和が求められたので，つぎに積を計算すると

$$\frac{\alpha^2}{\beta}\cdot\frac{\beta^2}{\alpha}=\alpha\beta=15$$

となる．

したがって，$\dfrac{\alpha^2}{\beta}$，$\dfrac{\beta^2}{\alpha}$ を 2 解とする方程式としては，

$\boldsymbol{x^2-\dfrac{28}{15}x+15=0}$ があげられる．

B.207

次の方程式を解け.

(1)　$x^3-3x^2+7x-5=0$

(2)　$(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)=3$

アプローチ　高次方程式を解くときの根本原理は，ただ一つ，

“方程式を，$f(x)=0$ の形に整理し，左辺を因数分解すること

により，低次の方程式になおす”

これだけです．その際，役立つのは，因数定理だけとは限りません！

解答　**(1)**　$x=1$ が解の1つであることから，左辺は，$x-1$ を因数にもつ．このことに注意して左辺を因数分解すると，

$$(x-1)(x^2-2x+5)=0$$

となり，これより

$$x-1=0 \text{ または } x^2-2x+5=0$$

◁ B.202

となる．したがって，方程式の解は，

$$\boldsymbol{x=1 \text{ または } x=1\pm 2i}$$

である．

(2)　与えられた方程式の左辺は，

(第1因数と第4因数の積)$=x^2+5x+4$

(第2因数と第3因数の積)$=x^2+5x+6$

となるので，

$$X=x^2+5x$$

とおくと，Xは，2次方程式

$$(X+4)(X+6)=3$$

$$\therefore\quad X^2+10X+21=0$$

$$\therefore\quad (X+3)(X+7)=0$$

を満たす．ゆえに

$$X=-3 \text{ または } X=-7.$$

◁ 結局，$(x^2+5x+3)\times(x^2+5x+7)=0$ と変形できた，ということ．

$X=-3$ すなわち $x^2+5x=-3$ となるのは

$$\boldsymbol{x=\frac{-5\pm\sqrt{13}}{2}}$$

のときである．同様に，$X=-7$ となるのは

$$\boldsymbol{x=\frac{-5\pm\sqrt{3}\,i}{2}}$$

のときである．

B.208

方程式

$$z^4+z^3+z^2+z+1=0 \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

を考える．

(1) $z+\dfrac{1}{z}=t$ とおいて，t の満たす方程式を解け．

(2) ①を解け．

アプローチ 高次方程式解法の根本原理は，因数分解であると前問で述べましたが，実数係数の範囲で因数が容易に見つかる保証はありません．特別の形をした4次方程式においては，うまい技法があります．①の両辺を z^2 で割ってみましょう．

解答 **(1)** $z=0$ は①の解でないので，①は

$$z^2+z+1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}=0$$

と同値である．これを t で表すと

$z^2+\dfrac{1}{z^2}=t^2-2$ ▷

$$(t^2-2)+t+1=0$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{t^2+t-1=0} \quad \cdots\cdots\cdots ②$$

(2) ②を解いて

$$t=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2} \quad \cdots\cdots\cdots ③$$

また

$$z+\frac{1}{z}=t$$

$$\therefore\quad z^2-tz+1=0$$

を z について解くと

$$z=\frac{t\pm\sqrt{t^2-4}}{2}$$

となるから，これに③を代入して

$$z=\boldsymbol{\frac{-1+\sqrt{5}\pm\sqrt{10+2\sqrt{5}}\,i}{4}},$$

$$\boldsymbol{\frac{-1-\sqrt{5}\pm\sqrt{10-2\sqrt{5}}\,i}{4}}$$

B.209

(1)　$\alpha^2=3+4i$ を満たす複素数 α を求めよ．

(2)　方程式 $z^4-6z^2+25=0$ を解け．

アプローチ　(1)　$\alpha=a+bi$ とおいて，実数 a，b を求めます．

(2)　z^2 の値は，すぐ分かります．

解答　(1)　a，b を実数として，$\alpha=a+bi$ とおくと，

$$(a+bi)^2=3+4i$$

$$\therefore\ \begin{cases} a^2-b^2=3 \\ ab=2 \end{cases}$$

b を消去すると，

$$a^2-\frac{4}{a^2}=3$$

$$\therefore\ a^4-3a^2-4=0$$

$$\therefore\ (a^2-4)(a^2+1)=0$$

◀ a は実数．

$$\therefore\ a=\pm2$$

よって，$(a,\ b)=(\pm2,\ \pm1)$　(複号同順)

$$\therefore\ \boldsymbol{\alpha=\pm(2+i)}$$

(2)　$z^2=X$ とおくと，X は

$$X^2-6X+25=0$$

を満たす．したがって　$X=3\pm4i$ である．

まず，(1)により，

$$z^2=3+4i \iff z=\pm(2+i)$$

他方，　$z^2=3-4i$ については，(1)と同様に

$$(a+bi)^2=3-4i$$

を考えると

$$ab=-2$$

となる点が違うだけであるから，残りは同様にして

$$z^2=3-4i \iff z=\pm(2-i)$$

以上により

$$\boldsymbol{z=\pm(2+i),\ \pm(2-i)}$$

B. 210

方程式

$$z^3+az^2+bz+c=0 \quad \cdots\cdots\cdots \ ①$$

の3つの解を α，β，γ とするとき，

(1)　$\alpha+\beta+\gamma$，$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$，$\alpha\beta\gamma$ の値を求めよ．

(2)　$(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)$ の値を求めよ．

アプローチ　(1)　3次方程式の解と係数の関係です．①の左辺の因数分解を考えます．

解答　(1)　①の左辺は

$$z^3+az^2+bz+c=(z-\alpha)(z-\beta)(z-\gamma) \quad \cdots\cdots\cdots \ ②$$

のように因数分解されるから，係数を比較して

$$\begin{cases} a=-\alpha-\beta-\gamma \\ b=\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha \\ c=-\alpha\beta\gamma \end{cases} \quad \therefore \quad \begin{cases} \boldsymbol{\alpha+\beta+\gamma=-a} \\ \boldsymbol{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=b} \\ \boldsymbol{\alpha\beta\gamma=-c} \end{cases}$$

(2)　$\alpha+\beta+\gamma=-a$ だから，

$$\begin{aligned} &(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha) \\ &=(-a-\gamma)(-a-\alpha)(-a-\beta) \\ &=-a^3-(\alpha+\beta+\gamma)a^2 \\ &\quad -(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)a-\alpha\beta\gamma \\ &=-a^3+a^3-ba+c \\ &=\boldsymbol{-ab+c} \end{aligned}$$

［注］ 1°　(2)は，②に $z=-a$ を代入してもよい．

2°　②のように因数分解できる理由を考えて見たい．

$f(z)=z^3+az^2+bz+c$ とおく．

因数定理を用いると，

$f(z)$ は $z-\alpha$ で割り切れる．

$f(z)$ は $z-\beta$ で割り切れる．

$f(z)$ は $z-\gamma$ で割り切れる．

いうことが分かる．しかしこれから直ちに

$f(z)$ は $(z-\alpha)(z-\beta)(z-\gamma)$ で割り切れる

と結論することはできない．

まず α, β, γ がすべて異なるとしよう．このとき，$f(z)$ を $z-\alpha$ で割った商を $g(z)$ とすると，

$$f(z)=(z-\alpha)g(z)$$

これに $z=\beta$ を代入すると

$$0=f(\beta)=(\beta-\alpha)g(\beta)$$

$$\therefore\quad g(\beta)=0$$

となり，$g(z)$ は $z-\beta$ で割り切れる．そこで商を $h(z)$ とすると，

$$g(z)=(z-\beta)h(z)$$

同じ論法で $h(z)$ は $z-\gamma$ で割り切れることになるが，$h(z)$ は1次式だから，

$$h(z)=A(z-\gamma)$$

$$\therefore\quad f(z)=A(z-\alpha)(z-\beta)(z-\gamma)$$

ここで z^3 の係数を見て $A=1$ を得る．よって②が成立する．

次に $\alpha=\beta\fallingdotseq\gamma$ としよう．このとき，①が重複解 α を持つというのは

$$f(z) \text{ は } (z-\alpha)^2 \text{ で割切れる}$$

ことを意味した．そこで商を $h(z)$ とすると

$$f(z)=(z-\alpha)^2h(z)$$

となり，これに $z=\gamma$ を代入して $h(\gamma)=0$ を得る．
よって $h(z)$ は $z-\gamma$ で割り切れる．したがって

$$f(z)=(z-\alpha)^2(z-\gamma)$$

となる．

また $\alpha=\beta=\gamma$ のときは，3重解の定義により，$f(z)$ は $(z-\alpha)^3$ で割り切れ

$$f(z)=(z-\alpha)^3$$

を得る．

B. 211

$$\begin{cases} a+b+c=1 & \cdots\cdots\cdots ① \\ a^2+b^2+c^2=-1 & \cdots\cdots\cdots ② \\ a^3+b^3+c^3=4 & \cdots\cdots\cdots ③ \end{cases}$$ とする．

(1) a，b，c を3解とする3次方程式を1つ作れ．

(2) (1)を利用して，$a^5+b^5+c^5$ の値を求めよ．

アプローチ 「(未知数の個数)＝(方程式の個数) だから，a，b，c の値が求められる」と思ってはなりません．普通の方法では，a，b，c の値を求められませんし，本問を解決するためには，求める必要もないからです！

解答 (1) ②は

$$(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)=-1$$

と変形できるので，①の下では

$$ab+bc+ca=1 \quad \cdots\cdots\cdots ②'$$

と同値である．

（$a+b+c=1$ を代入する．）

また，③は

$$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc=4$$

と変形できるので，①と②の下では

$$abc=2$$

と同値である．

（$a+b+c=1$，$a^2+b^2+c^2=-1$，$ab+bc+ca=1$ を代入する．）

ゆえに，a，b，c は，3次方程式

$$\boldsymbol{x^3-x^2+x-2=0}$$

の3解である．

(2) $x^5=(x^3-x^2+x-2)(x^2+x)+x^2+2x$

が恒等的に成立するから，

$$a^5=(a^3-a^2+a-2)(a^2+a)+a^2+2a$$
$$=a^2+2a$$

である．

b^5，c^5 も同様である．

（割り算：$x^5 \div (x^3-x^2+x-2)$：商 x^2+x
x^5
$x^5-x^4+x^3-2x^2$
$x^4-x^3+2x^2$
$x^4-x^3+x^2-2x$
余り x^2+2x）

したがって

$$a^5+b^5+c^5=(a^2+b^2+c^2)+2(a+b+c)$$
$$=(-1)+2\cdot1$$
$$=\boldsymbol{1}$$

B. 212

a，b を実数とする．方程式

$$2x^3+ax^2+bx-6=0$$

が，$x=1+i$ を解にもつとき，残りの解を求めよ．

アプローチ 未知数は2つ（a と b）あるのに，条件式は1つしかたちません．さりげなく仮定されている条件があります．

解答　$x=1+i$ が解であるから

$$2(1+i)^3+a(1+i)^2+b(1+i)-6=0$$

が成り立つ．これを計算すると

$$2(1+3i-3-i)+a(1+2i-1)$$
$$+b(1+i)-6=0$$

$$\therefore\quad (b-10)+(2a+b+4)i=0$$

となる．

◁ i について整理した．

ここで，$b-10$，$2a+b+4$ が実数であることに注意すると，上式は，

$$\begin{cases} b-10=0 \\ 2a+b+4=0 \end{cases} \quad \therefore \quad \begin{cases} a=-7 \\ b=10 \end{cases}$$

を意味する．

◁ ここが急所，方程式が2つ出てきたので a，b が決定される．

ゆえに，与えられた方程式は

$$2x^3-7x^2+10x-6=0$$

であり，これは

$$(2x-3)(x^2-2x+2)=0$$

と因数分解される．

◁ $x=\dfrac{3}{2}$ が1つの解であることを見つける．または，下の研究

したがって，残りの解は

$$\boldsymbol{\frac{3}{2}} \text{ と } \boldsymbol{1-i}$$

である．

研究　$f(x)$ を実数係数の多項式とするとき，

$$f(\alpha)=0 \Longrightarrow f(\overline{\alpha})=0$$

（$\overline{\alpha}$ は，α の共役複素数）

という定理がある．これに基くと，$x=1+i$ が解であれば，$x=1-i$ も解であることがわかり，$1\pm i$ を解とする方程式

$$x^2-2x+2=0$$

を思いうかべれば，上の因数分解に気づくのはたやすい．

B.213

方程式

$$z^2-(2-i)z-1+5i=0$$

を解け．

アプローチ 解の公式 $z=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ を導く論法は，a，b，c が複素数の場合にも成立します．唯一の問題は $\sqrt{b^2-4ac}$ という虚数の平方根ですが，B.209(1)を参考にしましょう．

解の公式を導く論法を確認する．

解答 方程式の左辺を平方完成する．

$$\left\{z-\left(1-\frac{i}{2}\right)\right\}^2-\left(1-\frac{i}{2}\right)^2-1+5i=0$$

$$\left\{z-\left(1-\frac{i}{2}\right)\right\}^2=\frac{7}{4}-6i$$

ここで，a，b を実数として

$$(a+bi)^2=\frac{7}{4}-6i$$

とすると，

$$\begin{cases} a^2-b^2=\dfrac{7}{4} \\ ab=-3 \end{cases}$$

これを解いて，

$$(a,\ b)=\left(\pm2,\ \mp\frac{3}{2}\right)$$

よって

$$z-\left(1-\frac{i}{2}\right)=\pm\left(2-\frac{3}{2}i\right)$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{z=3-2i,\ -1+i}$$

B. 214

(1)　xについての2つの方程式

$$x^2-(a+1)x+2=0 \quad \cdots\cdots\cdots \quad ①$$

$$x^2-x-a=0 \quad \cdots\cdots\cdots \quad ②$$

が共通の実数解をもつのは，実数aがどんな値のときか．

(2)　aを実数の定数とする．xの2次方程式

$$(1+i)x^2-(a+1+i)x+(2-ai)=0$$

が実数解をもつのは，aがどんな値のときか．ただし，iは虚数単位である．

アプローチ　(1)　①と②の共通解とは，①と②をxについての連立方程式と見なしたときの解にほかなりません．(2)では，方程式の係数が実数でないので，'判別式≧0' は使えません！

解答　**(1)**　②−①を使って，x^2の項を消去すると

$$ax-(a+2)=0 \quad \cdots\cdots\cdots \quad ③$$

が得られる．逆に，②−③により①が得られるので①と②の共通解は，②と③の共通解である．よって②と③の共通の実数解をもつための条件を求めればよいが，③は，$a \neq 0$ のとき

$$x=\frac{a+2}{a} \quad \cdots\cdots\cdots \quad ③'$$

という唯一の解をもち，他のときは解をもたない．

◁ ①かつ② ⟹ ③

◁ ②かつ③ ⟹ ①

結局 $\begin{cases}①\\②\end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases}②\\③\end{cases}$

ゆえに，②と③が共通の実数解をもつのは③′が，②を満たすとき，すなわち

$$\left(\frac{a+2}{a}\right)^2-\frac{a+2}{a}-a=0$$

となるときである．これをaについて整理すると

$$a^3-2a-4=0$$

$$\therefore \quad (a-2)(a^2+2a+2)=0$$

となる．

これより，求める実数aの値は，$\boldsymbol{a=2}$ である．

(2)　方程式は

$$\{x^2-(a+1)x+2\}+i(x^2-x-a)=0$$

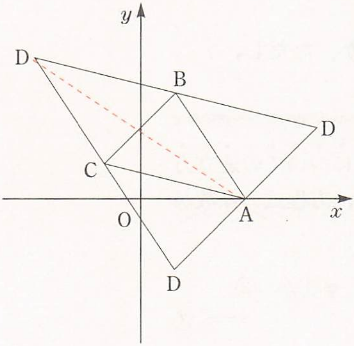
と変形される．したがって，これを満たす実数xが存在するのは，(1)と同じく，$\boldsymbol{a=2}$ のときである．

◁ この実数解は，①，②の共通の実数解．

B. 215

複素数平面上で3点3，$1+3i$，$-1+i$ を頂点とする平行四辺形の第4の頂点を表す複素数を求めよ．

アプローチ 平行四辺形の性質を思い出しましょう。



解答 A(3)，B$(1+3i)$，C$(-1+i)$ とし，第4の頂点をD(z)とする．

AB，AC，AD が対角線となる場合が考えられる．平行四辺形の対角線は互いに他を2等分する，つまり，対角線の中点どうしが一致するから，それぞれ

$$\frac{3+(1+3i)}{2}=\frac{(-1+i)+z}{2} \text{ より } z=5+2i,$$

$$\frac{3+(-1+i)}{2}=\frac{(1+3i)+z}{2} \text{ より } z=1-2i,$$

$$\frac{3+z}{2}=\frac{(1+3i)+(-1+i)}{2} \text{ より } z=-3+4i$$

となる．

（答） $\boldsymbol{5+2i}$，$\boldsymbol{1-2i}$ **または** $\boldsymbol{-3+4i}$

B. 216

複素数平面上で，0以外の複素数P(z)が与えられたとき，Q$(z+1+i)$，R$((1+i)z)$，S$\left(\dfrac{z}{1+i}\right)$ を図示せよ．

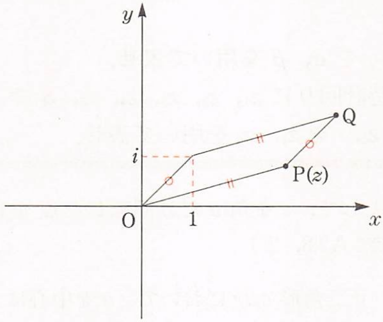
アプローチ Oを中心として，z を90°だけ回転した点が iz です．

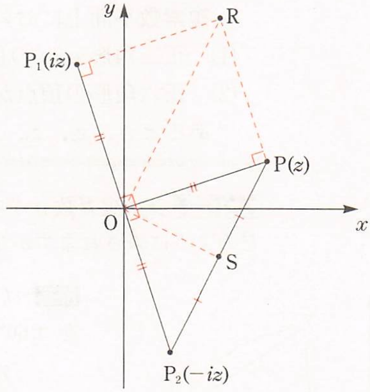
解答 Q$(z+1+i)$ はP(z)を $1+i$ だけ平行移動した点である．

$(1+i)z=z+iz$ だから，Oを中心としてP(z)を90°だけ回転した点 $P_1(iz)$ を考えると，四辺形 $OPRP_1$ は正方形となる．

$\dfrac{z}{1+i}=\dfrac{1}{2}(1-i)z=\dfrac{1}{2}(z-iz)$ だから，Oを中心としてP(z)を $-90°$ だけ回転した点 $P_2(-iz)$ を考えると，SはPP_2の中点である．

以上のことから，Q，R，S は下図の通りである．





［注］ $(1+i)z=\sqrt{2}(\cos 45°+i\sin 45°)z$,

$$\frac{z}{1+i}=\frac{1}{\sqrt{2}}\{\cos(-45°)+i\sin(-45°)\}z$$

より，R，S はそれぞれ O を中心とし，z を 45°，$-45°$ 回転し，さらに $\sqrt{2}$，$\frac{1}{\sqrt{2}}$ 倍した点であると考えてもよい．

B. 217

2 つの複素数 z_1，z_2 が，$|z_1|=1$，$z_1 \neq z_2$ をみたすとき，$\dfrac{z_1-z_2}{1-z_1\overline{z_2}}$ の絶対値を求めよ．

アプローチ 複素数 z の絶対値と共役複素数の間には，$|z|^2=z\overline{z}$ が成り立ちます．

解答 $|z_1|=1$，$z_1 \neq z_2$ より

$z_1\overline{z_1}=1$ ……… ① かつ $z_1\overline{z_2}\neq 1$

が成り立つ．よって，

$$\left|\frac{z_1-z_2}{1-z_1\overline{z_2}}\right|^2=\frac{z_1-z_2}{1-z_1\overline{z_2}}\cdot\overline{\left(\frac{z_1-z_2}{1-z_1\overline{z_2}}\right)}$$

$$=\frac{z_1-z_2}{1-z_1\overline{z_2}}\cdot\frac{\overline{z_1}-\overline{z_2}}{1-\overline{z_1}z_2}$$

$$=\frac{z_1\overline{z_1}-z_1\overline{z_2}-z_2\overline{z_1}+z_2\overline{z_2}}{1-z_1\overline{z_2}-\overline{z_1}z_2+z_1\overline{z_1}z_2\overline{z_2}}$$

$$=\frac{1-z_1\overline{z_2}-\overline{z_1}z_2+z_2\overline{z_2}}{1-z_1\overline{z_2}-\overline{z_1}z_2+z_2\overline{z_2}} \quad (\because ①より)$$

$$=\mathbf{1}$$

◀ $z_1\overline{z_2}=1$ とすると $z_1\overline{z_2}=z_1\overline{z_1}$ より $z_1=z_2$ となり矛盾．

◀ 共役複素数の性質 A2.1V

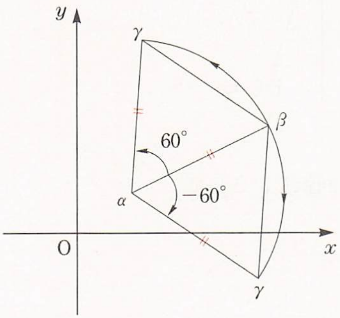
B. 218

複素数平面上において，

(1)　正三角形 $\alpha\beta\gamma$ の頂点 γ を α，β を用いて表せ．

(2)　正六角形の頂点が反時計回りに z_1，z_2，z_3，z_4，z_5，z_6 であるとき，z_2，z_3，z_5，z_6，を z_1，z_4 を用いて表せ．

アプローチ　複素数 α を中心として，z を角 θ だけ回転した点 w はどのように表されますか？（☞ A2.8，2°）



解答　(1)　正三角形 $\alpha\beta\gamma$ において，α を中心に β を $\pm60°$ だけ回転した点が γ であるから，

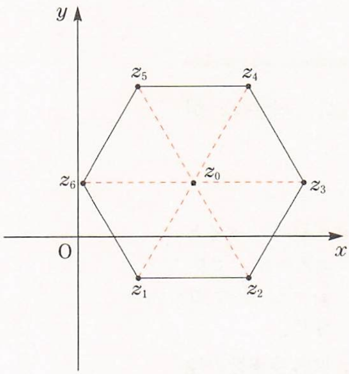
$$\gamma-\alpha=(\beta-\alpha)\{\cos(\pm60°)+i\sin(\pm60°)\}$$
$$=(\beta-\alpha)\left(\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i\right).$$

これより

$$\boldsymbol{\gamma=\left(\frac{1}{2}\mp\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\alpha+\left(\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\beta}\quad\text{（複号同順）}$$

となる．

(2)　正六角形の中心 z_0 は，線分 z_1，z_4 の中点であるから，$z_0=\dfrac{z_1+z_4}{2}$ である．



z_2，z_3 は z_0 を中心として z_1 を $60°$，$120°$ だけ，また，z_5，z_6 は z_0 を中心として z_4 を $60°$，$120°$ だけ回転した点であるから，

$$z_2=z_0+(z_1-z_0)(\cos60°+i\sin60°)$$
$$=\frac{z_1+z_4}{2}+\left(z_1-\frac{z_1+z_4}{2}\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$
$$=\boldsymbol{\frac{3+\sqrt{3}\,i}{4}z_1+\frac{1-\sqrt{3}\,i}{4}z_4}$$
$$z_3=z_0+(z_1-z_0)(\cos120°+i\sin120°)$$
$$=\boldsymbol{\frac{1+\sqrt{3}\,i}{4}z_1+\frac{3-\sqrt{3}\,i}{4}z_4}$$

同様に

$$z_5=\boldsymbol{\frac{1-\sqrt{3}\,i}{4}z_1+\frac{3+\sqrt{3}\,i}{4}z_4},$$
$$z_6=\boldsymbol{\frac{3-\sqrt{3}\,i}{4}z_1+\frac{1+\sqrt{3}\,i}{4}z_4}$$

である．

B. 219

n を正の整数とする．

(1)　$z+\dfrac{1}{z}=1$ のとき，$z^n+\dfrac{1}{z^n}$ の値を簡単に表せ．

(2)　$z=\dfrac{1-\sin\theta+i\cos\theta}{1-\sin\theta-i\cos\theta}$ $(0°<\theta<90°)$ のとき，z^n の絶対値と偏角を求めよ．

アプローチ　いずれも，まずド・モアブルの定理が適用できるような形に，z を変形します．

解答　(1)　$z+\dfrac{1}{z}=1$ つまり $z^2-z+1=0$

より，

$$z=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}=\cos(\pm 60°)+i\sin(\pm 60°)$$

である．よって，

$$\begin{aligned} z^n+\frac{1}{z^n}&=z^n+z^{-n}\\ &=\{\cos(\pm 60°)+i\sin(\pm 60°)\}^n\\ &\qquad+\{\cos(\pm 60°)+i\sin(\pm 60°)\}^{-n}\\ &=\{\cos(\pm 60n°)+i\sin(\pm 60n°)\}\\ &\qquad+\{\cos(\mp 60n°)+i\sin(\mp 60n°)\}\\ &=\mathbf{2\cos 60n°} \end{aligned}$$

となる．

◀ $n=6m$，$6m\pm1$，$6m\pm2$，$6m+3$ $(m=0, 1, 2, \cdots)$ のとき，2，1，-1，-2 である．

(2)　$$\begin{aligned} z&=\frac{(1-\sin\theta+i\cos\theta)(1-\sin\theta+i\cos\theta)}{(1-\sin\theta-i\cos\theta)(1-\sin\theta+i\cos\theta)}\\ &=\frac{2(1-\sin\theta)(-\sin\theta+i\cos\theta)}{2(1-\sin\theta)}\\ &=-\sin\theta+i\cos\theta\\ &=\cos(\theta+90°)+i\sin(\theta+90°) \end{aligned}$$

◀ $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ を利用する．

より，

$$z^n=\cos n(\theta+90°)+i\sin n(\theta+90°)$$

となるから

　絶対値 $|z^n|=\mathbf{1}$，偏角 $\arg z^n=\boldsymbol{n(\theta+90°)}$

である．

B. 220

次の関係式をみたす複素数 z をそれぞれ求めよ．

(1) $z^4=-8(1+\sqrt{3}i)$

(2) $z^{12}=1$，ただし z の実数部，虚数部はともに正とする．

アプローチ z を極形式で表して計算すると楽です．

解答 z を極形式

$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ …① $(r>0,\ 0°\leqq\theta<360°)$

で表す．

(1) $z^4=-8(1+\sqrt{3}i)$

つまり

$$\{r(\cos\theta+i\sin\theta)\}^4=16\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

$$r^4(\cos 4\theta+i\sin 4\theta)=16(\cos 240°+i\sin 240°)$$

より，

$r^4=16$,

$4\theta=240°+360°\times k \quad (k=0, 1, 2, 3)$

$\therefore \quad r=2, \quad \theta=60°+90°\times k$

となる．

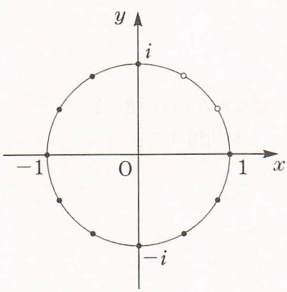
$k=0,\ 1,\ 2,\ 3$ に応じて，①より

$$\boldsymbol{z=1+\sqrt{3}i,\ -\sqrt{3}+i,\ -1-\sqrt{3}i,\ \sqrt{3}-i}$$

である．

(2) $z^{12}=1$

1の12乗根は，1を含み，単位円 $|z|=1$ を12等分する点で表される．



つまり

$$r^{12}(\cos 12\theta+i\sin 12\theta)=\cos 0°+i\sin 0°$$

より，

$r^{12}=1, \quad 12\theta=360°\times k$

$r=1, \quad \theta=30°\times k \ (k=0, 1, 2, \cdots, 11)$

となる．

このうち，z の実数部 $r\cos\theta$，虚数部 $r\sin\theta$ がともに正となるのは，$k=1,\ 2$ に対応する

$$\boldsymbol{z=\frac{\sqrt{3}+i}{2},\ \frac{1+\sqrt{3}i}{2}}$$

の2個だけである．

B. 221

複素数平面上で $\dfrac{(1+i)(z-2)}{z}$ が実数となるような複素数 z が描く図形を求める．

アプローチ 複素数 w が実数であるための条件 $w=\overline{w}$ を利用しても，$z=x+yi$ とおいて x と y の関係式を導いても解決できます

解答 与えられた式が実数を表す条件は

$$\frac{(1+i)(z-2)}{z}=\overline{\left\{\frac{(1+i)(z-2)}{z}\right\}}$$ ◀A2.1V

すなわち

$$\frac{(1+i)(z-2)}{z}=\frac{(1-i)(\overline{z}-2)}{\overline{z}} \quad \cdots\cdots \text{①}$$ ◀A2.1V

である．$z\neq 0$ …… ② のもとで，①は

$$(1+i)\overline{z}(z-2)=(1-i)z(\overline{z}-2)$$
$$z\overline{z}-(1-i)\overline{z}-(1+i)z=0$$
$$\{z-(1-i)\}\{\overline{z}-(1+i)\}=(1-i)(1+i)$$

◀上式を整理して $2i$ で割った．

つまり

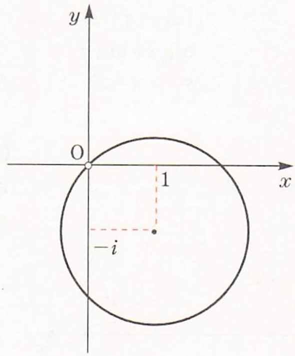
$$|z-(1-i)|=\sqrt{2}$$

◀$\overline{z}-(1+i)=\overline{z-(1-i)}$ に注意する．

と同値である．

②に注意すると，z が描く図形は

中心 $1-i$，半径 $\sqrt{2}$ の円から点 O を除いた部分 (右図の太線部分) である．



［注］ $z=x+yi$ とおくとき

$$\frac{(1+i)(z-2)}{z}=\frac{(1+i)\{(x+yi)-2\}}{x+yi}$$
$$=\frac{(1+i)\{(x+yi)-2\}(x-yi)}{x^2+y^2}$$

となる．よって，この値が実数となるのは，

$x^2+y^2\neq 0$ かつ〔分子の虚数部〕$=x^2+y^2-2x+2y=0$

のときであることから求めてもよい．

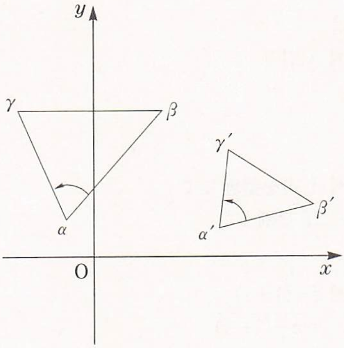
B.222

複素数平面上の 2 つの三角形 $\triangle\alpha\beta\gamma$, $\triangle\alpha'\beta'\gamma'$ に関して，次の(1), (2)を証明せよ．

(1)　$\triangle\alpha\beta\gamma \backsim \triangle\alpha'\beta'\gamma'$ (同じ向き) $\iff \dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\dfrac{\gamma'-\alpha'}{\beta'-\alpha'}$

(2)　$\triangle\alpha\beta\gamma \backsim \triangle\alpha'\beta'\gamma'$ (逆向き) $\iff \dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\dfrac{\overline{\gamma'}-\overline{\alpha'}}{\overline{\beta'}-\overline{\alpha'}}$

アプローチ　三角形の相似条件の一つ「2 辺の比とはさまれる角が等しい」を使いますが，複素数平面では角の向きに注意が必要です．



解答　(1)　$\triangle\alpha\beta\gamma$ と $\triangle\alpha'\beta'\gamma'$ が同じ向き (つまり $\alpha\beta\gamma$ および $\alpha'\beta'\gamma'$ の順にともに時計回りまたは反時計回り) に相似であるための必要十分条件は，

$$\begin{cases} 2\text{ 辺の比}: |\gamma-\alpha| : |\beta-\alpha| = |\gamma'-\alpha'| : |\beta'-\alpha'| \\ \text{はさまれる角}: \angle\beta\alpha\gamma = \angle\beta'\alpha'\gamma' \end{cases}$$

が成り立つことである．これらは，さらに，

$$\left|\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right|=\left|\frac{\gamma'-\alpha'}{\beta'-\alpha'}\right| \text{ かつ}$$

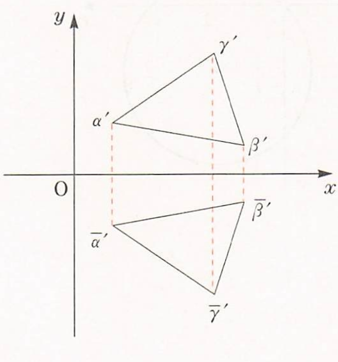
$$\arg\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\arg\frac{\gamma'-\alpha'}{\beta'-\alpha'}$$

つまり

$$\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\frac{\gamma'-\alpha'}{\beta'-\alpha'}$$

と同値である．■

$|z|=|z'|$ かつ $\arg z=\arg z'$ $\iff z=z'$



(2)　一般に z と $\overline{z}$ は実軸に関して対称であるから，$\triangle\overline{\alpha'}\,\overline{\beta'}\,\overline{\gamma'}$ は $\triangle\alpha'\beta'\gamma'$ と実軸に関して対称であり，2 つの三角形は逆向きに合同である．

したがって

$\triangle\alpha\beta\gamma \backsim \triangle\alpha'\beta'\gamma'$ (逆向き)

$\iff \triangle\alpha\beta\gamma \backsim \triangle\overline{\alpha'}\,\overline{\beta'}\,\overline{\gamma'}$ (同じ向き) ………(＊)

さらに，ここで(1)を適用すると

$$(＊) \iff \frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\frac{\overline{\gamma'}-\overline{\alpha'}}{\overline{\beta'}-\overline{\alpha'}}$$

が成り立つ．■

B. 223

複素数平面上の $\triangle\alpha\beta\gamma$ に関して，

$$\triangle\alpha\beta\gamma \text{ が正三角形である} \iff \alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha=0$$

を証明せよ．

アプローチ▶ γ を α，β で表した式（B.218 (1)）を利用する方法が一番簡明かもしれません．

解答 $\triangle\alpha\beta\gamma$ が正三角形である

$\iff$ α を中心に，β を $\pm60°$ だけ回転した点が γ である．

$$\iff \quad \gamma-\alpha=(\beta-\alpha)\{\cos(\pm60°)+i\sin(\pm60°)\}$$

最後の式を整理すると

$$\gamma-\alpha=(\beta-\alpha)\left(\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

$$\frac{1}{2}(2\gamma-\alpha-\beta)=\pm\frac{\sqrt{3}\,i}{2}(\beta-\alpha)$$

となるが，これは

$$\left\{\frac{1}{2}(2\gamma-\alpha-\beta)\right\}^2=\left\{\pm\frac{\sqrt{3}\,i}{2}(\beta-\alpha)\right\}^2$$

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha=0$$

と同値である．■

別解 $\triangle\alpha\beta\gamma$ が正三角形である

$$\iff \quad \angle\alpha\beta\gamma=\angle\beta\gamma\alpha=\angle\gamma\alpha\beta=\pm60°$$

$$\iff \quad \triangle\alpha\beta\gamma\backsim\triangle\beta\gamma\alpha \quad \text{（同じ向き）}$$

$$\iff \quad \frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\frac{\alpha-\beta}{\gamma-\beta}$$

◀ B.222 (1)

この式の分母を払って，整理すると

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha=0$$

となる．■

［注］ 特に，相異なる点 0，α，β が正三角形の頂点となるための必要十分条件は

$$\alpha^2+\beta^2-\alpha\beta=0$$

である．

B.224

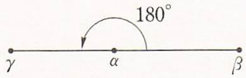
複素数平面上の異なる点 α, β, γ が１直線上にあるための必要十分条件は

$$\overline{\alpha}(\beta-\gamma)+\overline{\beta}(\gamma-\alpha)+\overline{\gamma}(\alpha-\beta)=0$$

であることを証明せよ．

アプローチ　3点が１直線上にあるのは，$\beta-\alpha$ と $\gamma-\alpha$ のなす角がどんなときですか？





解答　3点 α, β, γ が１直線上にある

$\iff$ $\beta-\alpha$ と $\gamma-\alpha$ のなす角が 0° または 180° である

$\iff$ $\arg\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=0°$ または 180°

$\iff$ $\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ が実数である．

$\iff$ $\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\overline{\left(\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right)}$

$\iff$ $\overline{\alpha}(\beta-\gamma)+\overline{\beta}(\gamma-\alpha)+\overline{\gamma}(\alpha-\beta)=0$ ■

右辺は $\dfrac{\overline{\gamma}-\overline{\alpha}}{\overline{\beta}-\overline{\alpha}}$ に等しい．

B.225

２つの実数係数の２次方程式

$x^2-2ax+b=0$ …… ①，$x^2-2a'x+b'=0$ …… ②

において，　$b-2aa'+b'=0$ の関係があり，①の２解 z_1, z_2 と②の２解 z_3, z_4 はすべて異なるものとする．

(1) $(z_1-z_3)(z_2-z_4)+(z_1-z_4)(z_2-z_3)=0$ を示せ．

(2) 複素数平面上で z_1, z_2, z_3, z_4 はどのような位置関係にあるか．

アプローチ　(1)は解と係数の関係を利用するだけです．(1)の関係式から何を読み取るかが(2)のポイントです．

解答　（１）　方程式①，②の解と係数の関係：

$$\begin{cases} z_1+z_2=2a, & z_1z_2=b \\ z_3+z_4=2a', & z_3z_4=b' \end{cases}$$

が成り立つ．これらを

$$b-2aa'+b=0 \quad \cdots\cdots\cdots \quad ③$$

に代入して

$$z_1z_2-2\cdot\frac{1}{2}(z_1+z_2)\frac{1}{2}(z_3+z_4)+z_3z_4=0$$

$$(z_1z_2-z_1z_4-z_2z_3+z_3z_4)$$
$$+(z_1z_2-z_1z_3-z_2z_4+z_3z_4)=0$$

整理すると

$$(z_1-z_3)(z_2-z_4)+(z_1-z_4)(z_2-z_3)=0 \quad \cdots \quad ④$$

が導かれる. ■

(2) z_1, z_2, z_3, z_4 はすべて異なるから

$$\frac{z_1-z_3}{z_2-z_3}=-\frac{z_1-z_4}{z_2-z_4} \quad \cdots\cdots\cdots \quad ④'$$

より

$$\arg\frac{z_1-z_3}{z_2-z_3}=\arg\left(-\frac{z_1-z_4}{z_2-z_4}\right)$$

$$\angle z_2z_3z_1=\angle z_2z_4z_1\pm180°$$

$$\angle z_2z_3z_1-\angle z_2z_4z_1=\pm180° \quad \cdots\cdots\cdots \quad ⑤$$

◀ $\arg(-z)$
$=\arg z\pm180°$

が成り立つ.

⑤より, z_1, z_2, z_3, z_4 は同一直線または同一円周上にあり, 線分または弧 z_1z_2 上に z_3, z_4 のいずれか一方だけがある.

また, ④′の絶対値をとると

$$|z_1-z_3|:|z_2-z_3|=|z_1-z_4|:|z_2-z_4|$$

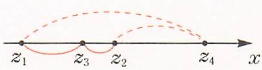
が成り立つから, z_3, z_4 から z_1, z_2 までの距離の比は等しい.

さらに, ①, ②の判別式 D_1, D_2 において

$$\frac{1}{4}(D_1+D_2)=a^2-b+a'^2-b'=(a-a')^2\geqq0$$

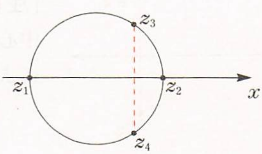
◀ $b+b'=2aa'$

であるから, ①, ②の少なくとも一方は実数解をもつ. また, ①, ②のいずれかが2虚数解をもつときには, それらは互いに共役である.



以上のことをまとめると, 次の通りである.

(答) z_1, z_2, z_3, z_4 は実軸上にあって, z_3, z_4 は z_1z_2 を同じ比に内分, 外分する, または実軸上に直径をもつ円周上にあって一方の組は実軸上に, 他方の組は実軸に関して対称である.

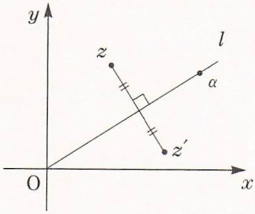


B.226

複素数平面上で，0 と $\alpha(\alpha \neq 0)$ を結ぶ直線を l とするとき，次のことを証明せよ．

z と z' が l に関して対称である $\Longleftrightarrow$ $\overline{\alpha}z'=\alpha\overline{z}$

アプローチ 2点P，Qが直線Lに関して対称であるための必要十分条件は"PQ⊥L かつ PQの中点∈L"です．



解答 z と z' が l に関して対称である ………（＊）

$\Longleftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{zz'} \perp l \text{ つまり } \overrightarrow{0\alpha} & \cdots\cdots\cdots ① \\ zz' \text{ の中点 } \dfrac{z+z'}{2} \text{ が } l \text{ 上にある} & \cdots ② \end{cases}$

①は $\dfrac{z'-z}{\alpha}$ が純虚数であることに等しいから

A2.8 ▶

$$① \Longleftrightarrow \frac{z'-z}{\alpha}=-\overline{\left(\frac{z'-z}{\alpha}\right)}$$

$$\therefore \quad \overline{\alpha}(z'-z)=-\alpha(\overline{z'}-\overline{z}) \cdots\cdots\cdots ③$$

また，② つまり 0，α，$\dfrac{z'+z}{2}$ が1直線上にあることは，$\dfrac{z'+z}{2\alpha}$ が実数であることに等しいから

$$② \Longleftrightarrow \frac{z'+z}{2\alpha}=\overline{\left(\frac{z'+z}{2\alpha}\right)}$$

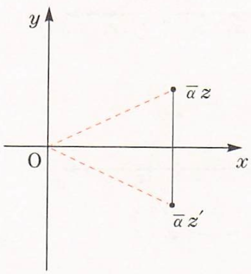
$$\therefore \quad \overline{\alpha}(z'+z)=\alpha(\overline{z'}+\overline{z}) \quad \cdots\cdots\cdots ④$$

一方の式の共役複素数を考えると，他の式が得られる． ▶

$\dfrac{1}{2}\{③+④\}$：$\overline{\alpha}z'=\alpha\overline{z}$ と $\dfrac{1}{2}\{④-③\}$：$\overline{\alpha}z=\alpha\overline{z'}$

は同値な式であるから結局，

（＊）$\Longleftrightarrow$ ③かつ④ $\Longleftrightarrow$ $\overline{\alpha}z'=\alpha\overline{z}$ ■



［注］ $\arg\overline{\alpha}=-\arg\alpha$ であるから，$\overline{\alpha}z$，$\overline{\alpha}z'$ はz，z' を原点中心に $-\arg\alpha$ だけ回転し，$|\overline{\alpha}|$ 倍した点である．同じ変換によって，l は実数軸にうつるから

（＊）$\Longleftrightarrow$ $\overline{\alpha}z$ と $\overline{\alpha}z'$ が実数軸に関して対称である．

$\Longleftrightarrow$ $\overline{\overline{\alpha}z}=\overline{\alpha}z'$

を利用しても証明できる．

B. 227

複素数平面上で，z が次の図形上を動くとき，$w=\dfrac{1}{z}$ はどのような図形上を動くか．

(1)　中心 $2i$，半径 1 の円周

(2)　2 点 1，i を通る直線

アプローチ　まず z のみたすべき方程式を求めます．次に $z=\dfrac{1}{w}$ を代入して w の方程式に直すだけで解決します．

解答　**(1)**　z の方程式：$|z-2i|=1$　………　①

に，$w=\dfrac{1}{z}$ を z について解いた $z=\dfrac{1}{w}$　………　②

を代入すると，

$$\left|\frac{1}{w}-2i\right|=1$$

となるが，分母を払い，2 乗して，整理すると

$$(1-2iw)\overline{(1-2iw)}=w\overline{w}$$

$$\left|w+\frac{2}{3}i\right|=\frac{1}{3}\quad \text{を得る．}$$

(答)　中心 $-\dfrac{2}{3}i$，半径 $\dfrac{1}{3}$ の円周

(2)　2 点 1，i を通る直線の方程式は，z，1，i が同一直線上にある条件から

$$\frac{z-1}{i-1}=\overline{\left(\frac{z-1}{i-1}\right)}$$

◀ A2.8，3°

$$(1+i)z-(1-i)\overline{z}-2i=0\quad\cdots\cdots\cdots\quad ③$$

となる．

②に③を代入して整理すると

$$w\overline{w}-\frac{1+i}{2}w-\frac{1-i}{2}\overline{w}=0$$

$$\left|w-\frac{1-i}{2}\right|=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

となるが，$w=\dfrac{1}{z}\neq 0$ に注意する必要がある．

(答)　中心 $\dfrac{1-i}{2}$，半径 $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ の円周

(ただし 1 点 0 を除く)

B. 228

複素数平面上で，z が単位円 $|z|=1$ の内部および周上を動くとき，$w=\dfrac{20z}{5-(2-i)z}$ はどこを動くか．

アプローチ B. 227 と同様に，z の関係式から w の関係式を導くだけです．

解答　z は $|z|\leqq 1$ ……… ①

をみたす．

①のもとでは $5-(2-i)z\neq 0$

$w=\dfrac{20z}{5-(2-i)z}$ を z について解いた

$$z=\frac{5w}{20+(2-i)w} \quad \cdots\cdots\cdots ②$$

を①に代入して，分母を払うと

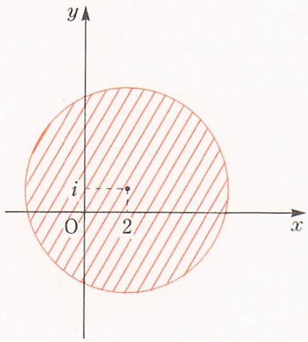
$$|5w|\leqq|20+(2-i)w| \quad \cdots\cdots\cdots ③$$

となる．③の両辺は 0 以上だから，両辺を 2 乗して整理すると

$$\{w-(2+i)\}\{\overline{w}-(2-i)\}\leqq 25$$

$$\therefore \quad |w-(2+i)|\leqq 5$$

を得る．



よって，w は **中心 $2+i$，半径 5 の円の内部および周上 (左図の斜線部分) を動く．** (答)

［注］ 複素数 z に対して，複素数 w を

$$w=\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta} \quad \cdots\cdots\cdots (*)$$

(α，β，γ，δ は複素数の定数で，$\alpha\delta-\beta\gamma\neq 0$)

によって対応させる変換を 1 次分数変換とよぶ．

直線を半径が無限大の円と考えると，円は円にうつされる．

z が円または直線上を動くとき，$(*)$ で定まる w もやはり円または直線上を動くことが知られている．これを，1 次分数変換における“円円対応”という．

実際，B. 227 は $\alpha=\delta=0$，$\beta=\gamma=1$ の場合であり，既に調べた通り，z が(1)の円，(2)の直線上を動くとき，w は円上を動く．

またB. 228 は $\alpha=20$，$\beta=0$，$\gamma=-(2-i)$，$\delta=5$ の場合である．

B. 229

複素数 z_1, z_2 は $z_1z_2 \neq 0$, $|z_1| \neq 1$, $|z_2| \neq 1$ をみたしている．0 から z_i $(i=1,\ 2)$ に向かう半直線上に $|z_i|\cdot|w_i|=1$ をみたす w_i $(i=1,\ 2)$ をとる．

z が単位円 $|z|=1$ 上を動くとき，次の(1)，(2)を示せ．

(1)　$w_i - z = \dfrac{z}{\overline{z_i}}(\overline{z}-\overline{z_i})$　$(i=1,\ 2)$

(2)　$\dfrac{z_1 - z}{z_2 - z}\cdot\dfrac{w_1 - z}{w_2 - z}$ の偏角は z によらず一定である

アプローチ　z_i を用いて，w_i はどのように表されますか？

解答　**(1)**　w_1 は 0 から z_1 に向かう半直線上にあるから，

$$w_1 = t z_1 \quad \cdots\cdots\cdots \text{①} \quad (t>0)$$

と表される．$|z_1|\cdot|w_1|=1$ に代入して

$$t=\frac{1}{|z_1|^2}=\frac{1}{z_1\overline{z_1}},\ \text{さらに①より}\ w_1=\frac{1}{\overline{z_1}}$$

を得る．

◁ $t>0$ より $|tz_1|=t|z_1|$ に注意．

一方，$|z|=1$ より　$z\overline{z}=1$ ……… ②　だから

$$w_1 - z = \frac{1}{\overline{z_1}} - z = \frac{z\overline{z}}{\overline{z_1}} - z = \frac{z}{\overline{z_1}}(\overline{z}-\overline{z_1})$$

が成り立つ．

z_2, w_2 に関しても同様である．■

(2)　(1)の関係式を用いると

$$\frac{z_1 - z}{z_2 - z}\cdot\frac{w_1 - z}{w_2 - z} = \frac{z_1 - z}{z_2 - z}\cdot\frac{\dfrac{z}{\overline{z_1}}(\overline{z}-\overline{z_1})}{\dfrac{z}{\overline{z_2}}(\overline{z}-\overline{z_2})}$$

$$=\frac{\overline{z_2}}{\overline{z_1}}\frac{|z_1 - z|^2}{|z_2 - z|^2}$$

◁ $\overline{z}-\overline{z_1} = -\overline{(z_1 - z)}$

となる．これより

$$\arg\frac{z_1 - z}{z_2 - z}\cdot\frac{w_1 - z}{w_2 - z} = \arg\frac{\overline{z_2}}{\overline{z_1}} + \arg\frac{|z_1 - z|^2}{|z_2 - z|^2}$$

$$=\arg\frac{\overline{z_2}}{\overline{z_1}}$$

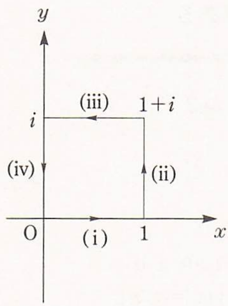
◁ $\dfrac{|z_1 - z|^2}{|z_2 - z|^2}$ は正数だから偏角は 0

は z によらず一定である．■

B. 230

複素数平面上で，z は 0，1，$1+i$，i を頂点とする正方形の周上を1周する．このとき，z の平方 $w=z^2$ が描く図形を図示せよ．

アプローチ z が正方形の4辺のそれぞれを動く場合に分けて，w の実数部分と虚数部分の関係を調べることになります．



解答 $z=x+yi$, $w=u+vi$ ……… ①

(x, y, u, v は実数) とおくとき，

$$w=z^2=(x+yi)^2=x^2-y^2+2xyi$$

より，

$$u=x^2-y^2,\ v=2xy \quad \cdots\cdots\cdots ②$$

の関係が成り立つ．

(i)　z が 0 から 1 まで動くとき

$0\leqq x\leqq 1$, $y=0$　であるから，②より

$$u=x^2 \qquad v=0.$$

よって，$v=0$, $0\leqq u\leqq 1$　である．

(ii)　z が 1 から $1+i$ まで動くとき

$x=1$, $0\leqq y\leqq 1$　であるから，①より

$$u=1-y^2,\ v=2y.$$

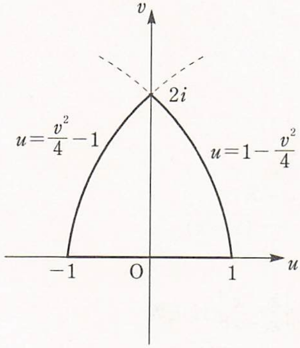
よって，$u=1-\dfrac{1}{4}v^2$, $0\leqq v\leqq 2$ である．

(iii)　z が $1+i$ から i まで動くとき

$0\leqq x\leqq 1$, $y=1$　であるから，①より

$$u=x^2-1,\ v=2x.$$

よって，$u=\dfrac{1}{4}v^2-1$, $0\leqq v\leqq 2$ である．



(iv)　z が i から 0 まで動くとき

$x=0$, $0\leqq y\leqq 1$　であるから，①より

$$u=-y^2,\ v=0.$$

よって，$v=0$, $-1\leqq u\leqq 0$ である．

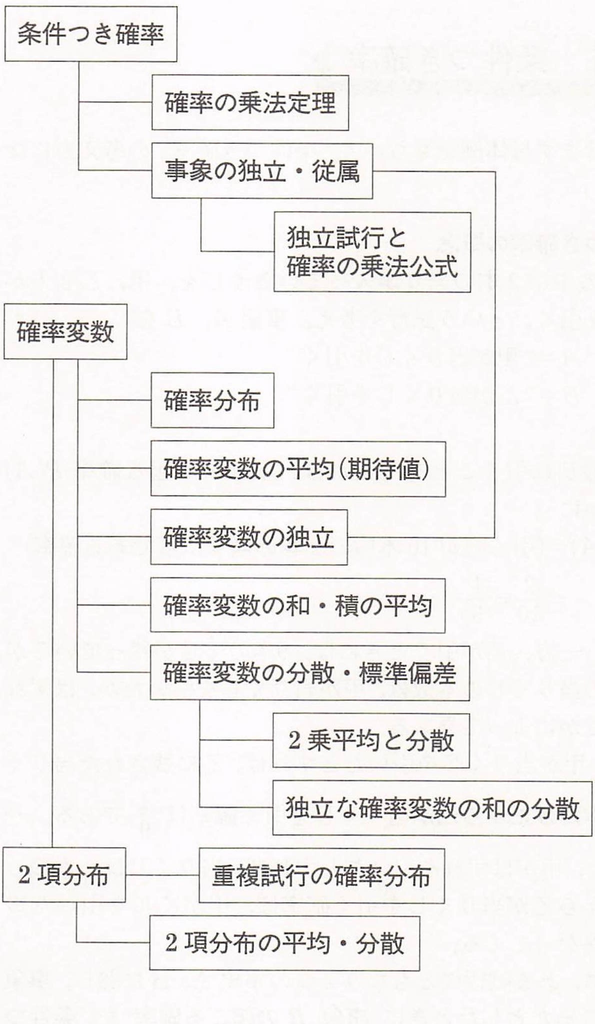
(i)〜(iv)をまとめると，w の描く図形は

(答)　2つの放物線の一部と線分（左図の太線）

である．

§3 確率分布

□ キー・ワード　（A基礎理論篇）



数学Iの確率では，試行や事象といった基礎的な概念，根元事象がすべて同様に確からしい試行にともなう様々な事象の計算法，一般的な和の公式，さらに，独立な試行にともなう事象の確率について学んだ．これらを受けての数学Bの確率では，条件つき確率とおよび，確率変数が主題である．

以下，早速に条件付き確率の解説に入るが，数学Iで学んだ内容に自信がもてない，あるいは，記憶があいまいになっている読者は，ぜひ，「大学への数学Iニューアプローチ」p.124～137　により理解を深めてほしい．

A3.1　条件つき確率

本節ではまず具体例をもちいて「条件つき確率」の考え方になじもう．

I．条件つき確率の概念

10本の中に2本の当りが入っているくじを，甲，乙2人がこの順を引く，という試行を考え，事象 A，B を

A＝“甲が当りくじを引く”

B＝“乙が当りくじを引く”

とおく．

甲が最初に引くことを考えれば，事象Aが起る確率 $P(A)$ は明らかに

$$P(A)=(\text{引くのが 10 本中の 2 本の当りくじである確率}) =\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$$

である．一方，乙が引くときには，9本のくじが残っているが，その中の当りくじの本数は，甲が当りくじを引いたか，はずれを引いたかによって異なる．

もし，甲が当りくじを引いたとすれば，乙に残された当りくじは1本だけだから乙が当りくじを引く確率は $\frac{1}{9}$ である．一方，もし，甲がはずれを引いたとすれば，当りくじは2本残っているから乙が当りくじを引く確率は，甲がくじを引いた後では，異なってくる．

一般に，ある試行にともなう2つの事象A，Bに関し，事象 **Aが起こったとしたときに** 事象 **Bの起こる確率** を，**条件つ**

き確率（A が起こったという条件のもとでの B の起こる確率の意味）といい，$\boldsymbol{P_A(B)}$ で表す．

1°　例 1　上の場合には

$$P_A(B)=\frac{1}{9},\quad P_A(B)=\frac{2}{9} \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

条件つき確率を用いると，A，B の積事象 $A\cap B$ の確率，すなわち A，B が共に起こる確率 $P(A\cap B)$ に関して次の定理が成り立つ．

［定理］　$P(A\cap B)=P(A)\cdot P_A(B)$　　**確率の乗法定理**

2°　この定理は

（A と B がともに起こる確率）

＝（A の起こる確率）×（A が起こったとした場合の B の起こる確率）

であるということを意味する．

3°　この公式を

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$$

と誤まりやすいが，これは一般的には成り立たない．後に述べるように，この等式が成り立つのは A と B が独立であるという特別な状況のもとにおいてだけである．

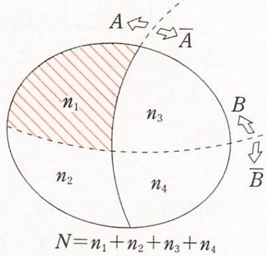
4°　例 2　10本のくじのうち2本の当りくじが入っているくじを，甲，乙の順に引くとき，“甲，乙ともに当る確率 p”を求めよう．

①の A，B を用いれば $p=P(A\cap B)$ である．したがって，乗法定理に①の数値を代入することにより

$$p=P(A\cap B)=P(A)\times P_A(B)=\frac{2}{10}\times\frac{1}{9}=\frac{2}{90}=\frac{1}{45}$$

5°　標本空間 S が，等確率の根元事象からなる試行にともなう，2つの事象 A，B を考える．この場合，上の定理が成り立つことは次のようにしてわかる．

標本空間 S の要素の個数が右図のようであったとすると，



$N=n_1+n_2+n_3+n_4$

$$P(A\cap B)=\frac{A\cap B\ \text{の要素の個数}}{S\ \text{の要素の個数}}=\frac{n_1}{N}$$

$$P(A)=\frac{A\text{の要素の個数}}{S\text{の要素の個数}}=\frac{n_1+n_2}{N}$$

$$P_A(B)=\frac{A\cap B\ \text{の要素の個数}}{A\text{の要素の個数}}=\frac{n_1}{n_1+n_2}$$

よって，$P(A\cap B)=P(A)\cdot P_A(B)$ となる．

6°　$P(A)$，$P(A\cap B)$ がわかっている場合，$P(A)\neq 0$ ならば，上の定理から

条件つき確率

［公式］　$P_A(B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}$　$(P(A)\neq 0)$

として，条件つき確率 $P_A(B)$ が求められることになる．これを発展させたものが，原因を確率的に推定するための根拠（**ベイズの定理**）として用いられる．

ガイド ☞B.309〜B.312

II．事象の独立と従属

数学 I では，独立な 2 つの試行 T_1，T_2 のそれぞれにともなう任意の事象 A，B どうしは，互いに他方の起こりやすさに影響を与えないこと，そうして，

$$P(T_1\text{で}A\text{が起こり，}T_2\text{で}B\text{が起こる})=P(A)\cdot P(B)$$

が成り立つことを学んだ．

実は，一つの試行にともなう 2 つの事象についても，一方が他方の起こりやすさに影響を与えるかどうかは大事な問題点である．以下，この考察に進もう．

2 つの事象 A，B について，

$$\begin{cases} A\text{が起こったとした場合の}B\text{の起こる確率 } P_A(B) \\ (\text{単に})B\text{の起こる確率 } P(B) \end{cases}$$

は一般には一致しない．

もし，A の起こることが B の起こる確率に何の影響も与えずに，

$$P_A(B)=P(B) \quad\cdots\cdots\cdots ①$$

が成立するならば，乗法定理から

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B) \quad\cdots\cdots\cdots ②$$

が得られる．

独立事象と従属事象

> [定義]　2つの事象 A，B において，
> $$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$$
> が成り立つとき，A と B とは **独立** である．
> または **独立事象** であるという．
> A と B とが独立でないとき，これらは **従属** である，または **従属事象** であるという．

1°　2つの事象 A，B が独立かどうかを調べるには，$P(A\cap B)$ と $P(A)\cdot P(B)$ とを別々に計算して，両者が等しいかどうかを見ればよい．

例1　2つのサイコロを振る場合，

A：奇数の目が出る．　　B：2以下の目が出る．

とすれば，$A\cap B$ は「1の目が出る」という事象を表す．そして，

$$P(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2},\ P(B)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3},\ P(A\cap B)=\frac{1}{6}$$

であるから，$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$ が成り立つ．

したがって，A と B とは独立事象であることがわかる．

例2　1つのサイコロを振る場合，

A：奇数の目が出る．　　C：3以下の目が出る．

とすれば，$A\cap C$ は「1か3の目が出る」という事象を表し，

$$P(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2},\ P(C)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2},\ P(A\cap C)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

であるから，$P(A\cap C)\neq P(A)\cdot P(C)$ である．

したがって，A と C とは従属事象である．

2°　$A=\phi$ (空事象) ならば，B がどんな事象であっても $A\cap B=\phi$ (空事象) である．

よって，$P(A)=0$，$P(A\cap B)=0$ となる．

したがって，$A=\phi$ ならば，$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$ は成立するので，

「空事象 ϕ は，他の任意の事象と独立である」

ことになる．

3°　$P(A)\neq 0$，$P(A)\neq 1$，$P(B)\neq 0$，$P(B)\neq 1$ の場合には，

$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$　…㋑

$\Longleftrightarrow P_A(B)=P(B)$　…㋺ $\Longleftrightarrow P_B(A)=P(A)$ …㋺′

$\Longleftrightarrow P_A(B)=P_{\bar{A}}(B)$　…㋩ $\Longleftrightarrow P_B(A)=P_{\bar{B}}(A)$…㋩′

の成立することが導びかれる．(☞B.304)

そこで，この場合には，㋺や㋩を A と B が独立であることの定義であるとみなしてもよい．

	A	$\overline{A}$
B	⚀	⚁
$\overline{B}$	⚂ ⚄	⚃ ⚅

	A	$\overline{A}$
C	⚀ ⚂	⚁
$\overline{C}$	⚄	⚃ ⚅

例　1つのサイコロを振る場合，

A：奇数の目が出る．

B：2以下の目が出る．

C：3以下の目が出る．

とすれば，

$$P(B)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}=P_A(B)$$ だから，A と B は独立である．

$$P_A(C)=\frac{2}{3}\neq\frac{1}{3}=P_{\overline{A}}(C)$$ だから，A と C は独立ではない．

などといえることになる．

4°　上記の㋺，㋺′，㋩，㋩′ を見ればわかるように，2つの事象 A，B が独立であるというのは，

「一方の事象が起こるかどうかが
他方の事象の起こる確率に影響を与えない」……㊁

ということを意味する．

逆に，このような認識にもとづいて，$P(A\cap B)$ を求めるのに

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$$

を利用することがある．その典型は次節で扱う独立な試行にともなう事象についての場合である．

5°　2つの事象 A と B が独立であるならば，つぎの各項も成立する．

1)　A の余事象 $\overline{A}$ と B とは独立である．

2)　A の余事象 $\overline{A}$ と B の余事象 $\overline{B}$ とは独立である．

（☞ B.304）

III　独立試行にともなう事象の確率

事象の独立性を理解したところで，数学 I で学んだ試行の独立性を見なおしておこう．

独立試行と確率の乗法公式

［定理］　T_1，T_2 が独立な試行であり，T_1 にともなう任意の事象を A，T_2 にともなう任意の事象を B とすれば，A，B は独立な事象である．

すなわち，

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B) \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

が成り立つ．

1°　高校レベルでは，2つの試行の独立性は直観的に判定してよい．大学以後のレベルでは，試行の独立性は，現象に対するモデルの設定にかかわる問題であるが，今のところ諸君は気にする必要はない．

2°　例1　2つのサイコロ a, b を同時に振るとき，a を振る試行と b を振る試行は独立である．したがって，たとえば

A：a を1の目が出る．　　B：b に1の目が出る．

はたがいに独立な事象である．ゆえに“a, b ともに1の目が出る”確率は

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{36}$$ である．

例2　甲，乙2人がジャンケンを5回する．この5回とも引分けになる確率 p を求めよう．

各回のジャンケンは試行として独立であるとみよう．そうして1回のジャンケンが引き分けとなる確率は $\frac{1}{3}$ である．したがって，乗法公式をくり返し用いることにより

$$p=\left(\frac{1}{3}\right)^5=\frac{1}{3^5}=\frac{1}{243}$$

3°　数学的には，

$S_1=\{a_1,\ a_2,\ \cdots\cdots,\ a_n\}$ を標本空間とする試行 T_1 と

$S_2=\{b_1,\ b_2,\ \cdots\cdots,\ b_n\}$ を標本空間とする試行 T_2

とが独立であるとは，

$$P([a_i,\ b_j])=P(\{a_i\})\cdot P(\{b_j\})\quad(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ m)\qquad\cdots\cdots\cdots②$$

が成り立つことである．

ただし，$[a_i,\ b_j]$ は T_1 の結果が a_i，T_2 の結果が b_i となる事象を表している．より正確に言えば，**2つの試行 T_1，T_2 を合せた試行 $\tilde{T}$** をまず考えるのである．$\tilde{T}$ の標本空間 $\tilde{S}$ は，集合 S_1，S_2 の直積にほかならず，

$$\begin{array}{l}[a_1,\ b_1],\ [a_1,\ b_2],\ \cdots\cdots\cdots\cdots,\ [a_1,\ b_m],\\ [a_2,\ b_1],\ [a_2,\ b_2],\ \cdots\cdots\cdots\cdots,\ [a_2,\ b_m],\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ [a_n,\ b_1],\ [a_n,\ b_2],\ \cdots\cdots\cdots\cdots,\ [a_n,\ b_m]\end{array}$$

の $m\times n$ 個の要素から成っている．すなわち，T_1，T_2 のすべての根元事象を組み合せて考えたものが $\tilde{T}$ の根元事象である．

$\tilde{T}$ を T_1 と T_2 の直積試行ということがある．

$\tilde{T}$ の任意の根元事象について②が成り立つとき試行 T_1，T_2 は

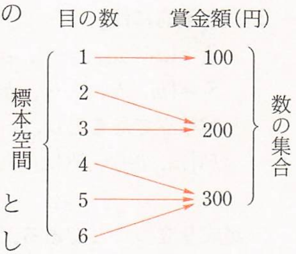
独立なのである．なお，定理の①の左辺の $A \cap B$ は，$\tilde{T}$ にともなう事象とみなされているのである．

A 3.2　確率変数

数学は現象の変化を変数を用いてとらえる．この変数と確率とが結びついたものが確率変数である．確率変数を用いて表現することにより確率的な現象の解析に，微積分法などの強力な武器が使えるのである．さらに，確率現象が時々刻々に変化しているときには，時間変数にも依存する確率変数が登場する．これが確率過程とよばれるものであり，多くの応用を生み出しながら，数学自体の進歩をいまも刺激している．

例をあげて説明しよう．サイコロを投げて，1 の目が出れば 100 円の賞金が与えられ，2 または 3 の目が出れば 200 円の賞金が与えられ，4 以上の目が出れば 300 円の賞金が与えられるとする．

このとき，出る目の数と賞金額との間には，右のような対応がある．



そして，賞金をX円とすれば，X はとる値が　100，200，300 であるような変数である．

また，たとえば，$X=200$ ということは，2 または 3 の目が出る事象を表している．

したがって，$X=200$ という事象の起こる確率を $P(X=200)$ と書けば，$P(X=200)=\dfrac{1}{3}$ である．

同様にして，$P(X=100)=\dfrac{1}{6}$，$P(X=300)=\dfrac{1}{2}$ である．

試行の結果として起るいろいろな事象の確率が定まっているとする．このとき，上のXのように，どの事象が起こるかによってその値が定まる変数を（その試行にともなう）**確率変数** という．

1°　試行の結果は根元事象すなわち標本空間の点によって表される

ので，確率変数とは標本空間で定義された関数に他ならない．確率関数とは言わないで確率変数と言うのは習慣による．

2°　確率変数を表すのに，X，Y，Z などの大文字を用いることが多い．

そして，確率変数Xのとりうる値を x_1，x_2，……などと対応する小文字で表す．このとき，X のとりうる値 x_i ごとに，$X=x_i$ となる確率 $P(X=x_i)$ が定まる．

3°　もう1つ例を示しておこう．

例　硬貨を2回投げる試行において，たとえば，1回目に表，2回目に裏が出ることを(○，×)のように書くことにすれば，この試行の標本空間は

$$S=(○, ○), (○, ×), (×, ○), (×, ×)$$

である．

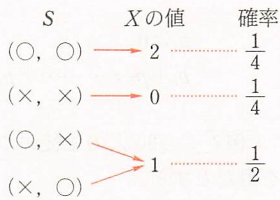
この試行で，表が出る回数をXとすれば，X は確率変数である．

Xのとりうる値は

0，1，2

であって，

$$\left.\begin{aligned}P(X=0)&=\frac{1}{4}\\ P(X=1)&=\frac{1}{2}\\ P(X=2)&=\frac{1}{4}\end{aligned}\right\}$$ である．



4°　確率変数のとりうる値が，上にあげた例のように，とびとびの値であるとき，この確率変数は **離散型確率変数** であるという．

A3.3　確率分布

一般に，確率変数Xのとる値が x_1，x_2，……，x_n であるとき，x_i と“X が x_i をとる確率”$P(X=x_i)$ との対応関係を **確率分布** という．

1°　確率分布のことを単に **分布** ともいう．

2°　例1　硬貨を2回投げる試行において，表の出る回数をXとすれば，X は確率変数であって，そのとりうる値は0，1，2であ

り，X がこれらの値をとる確率はそれぞれ $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ である．

この対応関係を表で示せば

Xの値	0	1	2	計
確　率	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1

一般に，確率変数Xのとる値が x_1, x_2, ……, x_n であるとき，$P(X=x_i)=p_i$ とおけば，X の分布は下の表のような **確率分布表** で表される．

Xの値	x_1	x_2	……	x_i	……	x_n	計
$P(X=x_i)$	p_1	p_2	……	p_i	……	p_n	1

このとき，

$$p_i \geqq 0$$
$$p_1+p_2+\cdots\cdots+p_n=1$$

確率分布の性質

3° 例2　100人の生徒について，むし歯の数を調べてつぎの表を得たとする．

むし歯の数	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	計
生　徒　数	3	5	6	15	29	20	10	5	3	4	100
相 対 度 数	0.03	0.05	0.06	0.15	0.29	0.20	0.10	0.05	0.03	0.04	1

いま，この100人のうちからくじによって1人を選び，その生徒のむし歯の数をXとすると，X は確率変数であって，0, 1, 2, ……, 9の値をとる．

たとえば，$X=3$ となる確率は，むし歯が3本ある生徒が選ばれる確率に等しく，これは，むし歯が3本ある生徒が全体のなかで占める相対度数0.15に等しい．

すなわち，Xの確率分布は，上の100人の生徒をむし歯の数にしたがって階級に分けたときの相対度数分布に一致する．

A3.4　確率変数の平均(期待値)

[定義]　確率変数Xのとりうる値がx_1，x_2，……
…，x_nであるとき

$$p_i=P(X=x_i) \qquad (i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n)$$

とおく．このとき，

$$x_1p_1+x_2p_2+\cdots\cdots x_np_n=\sum_{i=1}^{n}x_ip_i=E(X) \qquad \cdots\cdots\cdots ①$$

のことを，確率変数Xの平均または期待値という．

確率変数の平均，期待値

1°　記号$E(X)$のEはexpectation [期待，期待値] の頭文字である．

2°　例1　2つの硬貨を投げたとき，表の出る枚数をXとすれば，

$$x_1=0,\ x_2=1,\ x_3=2$$

として，

$$p_1=P(X=x_1)=\frac{1}{4},\ p_2=P(X=x_2)=\frac{1}{2},\ p_3=P(X=x_3)=\frac{1}{4}$$

であるから，

$$E(X)=0\cdot\frac{1}{4}+1\cdot\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{4}=1$$

つまり，この確率変数Xの期待値は，2つの硬貨を投げるという試行での，表の出る枚数の期待値(☞「大学への数学 I ニューアプローチ」，p.137)と合致している．

3°　ある試行にともなう確率変数X，ただし，$p_i=P(X=x_i)$を考える($i=1$，2，……，n)．この試行をN回行ったとき，$X=x_i$が実現する回数をr_iであったとする．いまN回の試行を通じてのXの実現値の算術平均をz_Nとおけば

$$z_N=\frac{1}{N}(x_1r_1+x_2r_2+\cdots\cdots+x_nr_n)=x_1\frac{r_1}{N}+x_2\frac{r_2}{N}+\cdots\cdots+x_n\frac{r_n}{N}$$

Nを限りなく大きくする極限では，$\frac{r_1}{N}\to p_1$，$\frac{r_2}{N}\to p_2$，……

……，$\frac{r_n}{N}\to p_n$ である．

したがって，$z_N\to x_1p_1+x_2p_2+\cdots\cdots+x_np_n=E(X)$．

すなわち，$E(X)$はXの実現値の平均の極限である．“確率変数の平均”という言い方はこれから来ている．

例 2　前小節の例 2 において，むし歯の数を表す確率変数Xの平均は，考えている 100 人の集団における 1 人当り平均のむし歯の数に一致する．

◈ 確率変数の一次式の平均 ◈

一般に，X を x_1，x_2，……，x_n という値をとる確率変数とし，a，b を定数とするとき，

$$Y=aX+b$$

とおけば，Y は ax_1+b，ax_2+b，……，ax_n+b という値をとる確率変数である．$a\neq 0$ ならば，

$$P(Y=ax_i+b)=P(X=x_i)\quad (i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n)$$

であるから，つぎの定理が成り立つ．

[定理]　a，b を定数として，確率変数 X，Y の間に

$$Y=aX+b$$

なる関係があれば

$$E(Y)=aE(X)+b$$

が成り立つ．ただし，$a\neq 0$ とする．

確率変数の 1 次式の平均

1°　証明：$a\neq 0$ ならば，

$$Y=ax_i+b \iff X=x_i$$

したがって，$P(Y=ax_i+b)=P(X=x_i)=p_i$ であるから

$$\begin{aligned}E(Y)&=\sum_{i=1}^{n}(ax_i+b)P(Y=ax_i+b)\\&=\sum_{i=1}^{n}(ax_i+b)P(X=x_i)=\sum_{i=1}^{n}(ax_i+b)p_i\\&=a\sum_{i=1}^{n}x_ip_i+b\sum_{i=1}^{n}p_i=aE(X)+b\end{aligned}$$ ■

2°　上の定理は $a=0$ のときにも成り立つ．

このときは，Y は b という値のみをとることになり，$P(Y=b)=1$，$E(Y)=b$ となるので定理の主張は自明である．

3°　この定理の特別の場合として，k が定数なら

$$E(X)=k+E(X-k)$$

が成立する．k として $E(X)$ に近いと思われる簡単な値をとると，$E(X-k)$ の計算式において，正負の項が打ち消すなどして，$E(X-k)$ の数値計算が $E(X)$ のそれよりも楽になることがある．

そのようなとき，上式を利用して $E(X)$ の値を求めるのが

仮平均 の方法である．近頃のように，性能のよい電卓が普及してくると，この種の“計算技巧”の有難味はやや減ってくる．

A 3.5 確率変数の独立

事象や試行の独立性に関連して，確率変数についても独立性が定義される．具体的には，ある試行にともなう2つの確率変数 X，Y が独立であるとは，X，Y のそれぞれが指定された値を取るという事象が互いに独立なことと定めるのである．念のために復習すると，2つの事象 A，B が独立とは，

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$$

が成り立つことであった．したがって，

> **[定義]**　2つの確率変数 X，Y が独立とは
> $$P(X=x_i \text{ かつ } Y=y_j)=P(X=x_i)\cdot P(Y=y_j)$$
> がすべての $(i,\ j)$ について成立することである．

2つの確率変数の独立

1°　確率変数 X の値は試行 T にともなって定まり，一方，確率変数 Y の値は試行 S にともなって定まるとする．2つの試行 T，S が独立ならば，2つの確率変数 X，Y は独立である．

2°　[例1]　100円硬貨1枚と10円硬貨2枚とを同時に投げるとき，100硬貨の表の出る枚数を X，10円硬貨の表の出る枚数を Y とすると，たとえば

$$P(X=0 \text{ かつ } Y=1)=\frac{1}{4},\ P(X=0)=\frac{1}{2},\ P(Y=1)=\frac{1}{2}$$

であり，$P(X=0 \text{ かつ } Y=1)=P(X=0)\cdot P(Y=1)$ が成り立つ．

同様に

$$P(X=i \text{ かつ } Y=j)=P(X=i)\cdot P(Y=j)$$

が $i=0,\ 1$；$j=0,\ 1,\ 2$ のすべてについて成立するので，この確率変数 X，Y は独立である．

もっとも，100円硬貨を投げることと10円硬貨を投げることは，試行として独立であるから，この場合の X，Y が独立であることは，　1°　にもとづいて理解できる．

3°　[例2]　1，2，……，10が記されている10枚のカードから無作

為に1枚を取出したときのカードに記入されている数を X，このカードを元へ戻さないで，残りの9枚から無作為に1枚を取り出したときのカードに記入されている数を Y とすれば，たとえば

$$0=P(X=1 \text{ かつ } Y=1)\neq P(X=1)\cdot P(Y=1)$$

となるので，この確率変数 X，Y は独立でない．

4°　例3　サイコロを2回振るとき，1回目に出る目の数を X_1，2回目に出る目の数を X_2 とすれば，X_1，X_2 は独立である．

A 3.6 確率変数の和・積の平均

ある試行について，X，Y が確率変数のとき

$$Z=Y+Y$$

もまた確率変数である．このとき，つぎの定理が成り立つ．

確率変数の和の平均

[定理1]　2つの確率変数 X，Y に対して

$$E(X+Y)=E(X)+E(Y)$$

が成り立つ．

1°　例　硬貨とサイコロとを同時に投げる試行において，硬貨に表が出たら1，裏が出たら−1を対応させる確率変数を X とし，サイコロの出た目の数を Y とする．$Z=X+Y$ のとる値は下の表のようになり，これは0から7までの整数値をとる確率変数である．

X ＼ Y	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
−1	0	1	2	3	4	5

← $Z=X+Y$ のとる値

たとえば，$Z=3$ とは「$X=1$ かつ $Y=2$」または「$X=-1$ かつ $Y=4$」などを考えて，Z の確率分布は下のようになる．

Zの値	0	1	2	3	4	5	6	7	計
確　率	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	1

したがって，

$$E(Z)=0\cdot\frac{1}{12}+1\cdot\frac{1}{12}+2\cdot\frac{2}{12}+\cdots\cdots+7\cdot\frac{1}{12}=\frac{42}{12}=3.5$$

一方,

$$E(X)=1\cdot\frac{1}{2}+(-1)\cdot\frac{1}{2}=0,\quad E(Y)=\sum_{k=1}^{6}k\cdot\frac{1}{6}=\frac{21}{6}=3.5$$

であって，たしかに $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$ が成り立っている.

2°　上にあげた例では，X と Y とは独立であるが，上の定理は X, Y が独立であってもなくても一般に成り立つ.

ガイド　その証明の道すじについては　☞ B.321

3°　一般に

確率変数の和の平均

> **[定理2]**　確率変数 X_1, X_2, ……, X_n に対して
> $$E(X_1+X_2+\cdots\cdots+X_n)=E(X_1)+E(X_2)+\cdots\cdots+E(X_n)$$

が成り立つ.

確率変数の積の平均については，つぎの定理がある.

独立な確率変数の積の平均

> **[定理3]**　2つの確率変数 X, Y が独立ならば
> $$E(XY)=E(X)E(Y)$$
> が成り立つ.

1°　証明の道すじについては　☞ B.322

2°　X, Y が独立でないなら，このような等式は成立するとは限らない．とくに

> 一般に　$E(X^2)\neq\{E(X)\}^2$

たとえば，サイコロをふったとき出る目を表す確率変数を X とおけば,

$$E(X)=\frac{21}{6},\quad E(X^2)=\frac{91}{6}.\qquad\therefore\quad \{E(X)\}^2\neq E(X^2).$$

A 3.7　分散・標準偏差

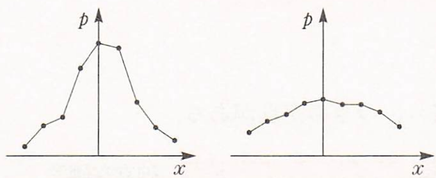
分　散
[variance]

[定義1]　確率変数Xに対して，その平均をmとするとき，確率変数$(X-m)^2$の平均のことを，Xの **分散** といい，$V(X)$で表す．

すなわち，Xのとる値をx_1，x_2，……，x_nとし，$X=x_i$となる確率$P(X=x_i)$をp_iとすれば，

$$V(X)=E((X-m)^2)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-m)^2p_i \quad \cdots\cdots ①$$

ただし，$m=E(X)$　である．



分散が小さい分布　　分散が大きい分布

1°　確率変数の分散は確率分布のちらばりの程度を表す量として用いられる．

分散は正か0であるが，分散が小さいとは，分布がその平均の近くに集中していることを意味し，分散が大きいとは，分布が幅広く拡がっていることを意味する．

2°　上のこの関係を明確にしたものに「チェビシェフの定理」がある．

ガイド ☞ B.321

3°　例1　硬貨を2回投げるとき，表が出る回数Xの分散を求めよう．

x_i	0	1	2
p_i	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

その分布は右表のようになり
$m=E(X)=1$　であるから

$$V(X)=(-1)^2\cdot\frac{1}{4}+0^2\cdot\frac{1}{2}+1^2\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$

である．

例2　0，1，2という値を等確率$\frac{1}{3}$でとるような確率変数Yについては，

$$V(Y)=(-1)^2\cdot\frac{1}{3}+0^2\cdot\frac{1}{3}+1^2\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{3}.$$

これは上の $V(X)$ より大きい．

標準偏差
[standard deviation]

> **[定義 2]**　確率変数Xの分散 $V(X)$ の正の平方根のことをXの **標準偏差** といい，$D(X)$，または σ_x という記号で表す．すなわち，
>
> $$D(X)=\sigma_x=\sqrt{V(X)} \qquad \cdots\cdots\cdots ②$$

1°　σ_x の σ は standard deviation＝標準偏差 の頭文字Sに相当するギリシャ文字シグマである．

2°　例　硬貨を 2 回投げるとき，表が出る回数Xの標準偏差は

$$\sigma=\sqrt{\frac{1}{2}}\fallingdotseq 0.707$$

3°　確率変数Xの平均，分散，標準偏差のことを，それぞれ，Xの確率分布の平均，分散・標準偏差ともいう．

4°　確率分布が具体的に与えられたとき，分散・標準偏差の数値を計算するのは，なかなか手数のいる仕事である．

そこで，計算の楽になる算法とか，計算ミスをしない計算様式とかいろいろ工夫がなされてきた．最近では，平均，分散・標準偏差がたやすく計算できる電卓が普及しつつあるので，これらを気にしなくてもよいようになった．

2 乗平均と分散との関係

> **[定理 1]**　確率変数Xの平均$E(X)$，分散$V(X)$と，X^2の平均$E(X^2)$との間には，等式
>
> $$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2 \qquad \cdots\cdots\cdots ③$$
>
> が成り立つ．

1°　**証明**：Xのとる値を x_1，x_2，……，x_n，$P(X=x_i)=p_i$，$E(X)=m$ として，

$$V(X)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-m)^2p_i=\sum_{i=1}^{n}(x_i{}^2-2mx_i+m^2)p_i$$

$$=\sum_{i=1}^{n}x_i{}^2p_i-2m\sum_{i=1}^{n}x_ip_i+m^2\sum_{i=1}^{n}p_i$$

ここで

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i = E(X^2),\quad \sum_{i=1}^{n} x_i p_i = m = E(X),\quad \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

であるから

$$V(X) = E(X^2) - 2m\cdot m + m^2\cdot 1 = E(X^2) - m^2$$
$$= E(X^2) - \{E(X)\}^2$$

2°　例　硬貨を2回投げるときの表が出る回数Xの分散を③によって求めよう．

$$\left.\begin{aligned} E(X) &= 0\cdot\frac{1}{4} + 1\cdot\frac{1}{2} + 2\cdot\frac{1}{4} = 1 \\ E(X^2) &= 0^2\cdot\frac{1}{4} + 1^2\cdot\frac{1}{2} + 2^2\cdot\frac{1}{4} = \frac{3}{2} \end{aligned}\right\}\quad \therefore\quad V(X) = \frac{3}{2} - 1^2 = \frac{1}{2}$$

3°　分散，標準偏差の算出には，その定義式①を直接用いるよりは，公式③によって計算する方が便利である．

確率変数の1次式の分散

[定理2]　a，b を定数として，確率変数 X，Y の間に

$$Y = aX + b$$

なる関係があれば

$$V(Y) = a^2 V(X)$$

が成り立つ．

1°　**証明**：Xのとる値を x_1，x_2，……，x_n，$P(X=x_i)=p_i$ とし，X の平均をmとすれば，A3.4 の定理より，

$$E(aX+b) = am + b$$

であるから，

$$V(aX+b) = \sum_{i=1}^{n}\{(ax_i+b)-(am+b)\}^2 p_i$$
$$= \sum_{i=1}^{n}\{a(x_i-m)\}^2 p_i = a^2\sum_{i=1}^{n}(x_i-m)^2 p_i = a^2 V(X)$$

2°　標準偏差についていえば，$D(aX+b)=|a|D(X)$ となる．

3°　この定理と，A3.4 の定理とを結びつけると，

> 確率変数Xの標準偏差 $D(X)$ が0でないとき，
>
> $$Z = \frac{X - E(X)}{D(X)}$$
>
> とおけば，確率変数Zの平均，分散は，それぞれ
>
> $E(Z)=0$，$V(Z)=1$　となる．

なお，上のZを，確率変数Xを **標準化** して得られる確率変数とよぶことがある．

独立な確率変数の和の分散

> [定理 3]　2 つの確率変数 X，Y が独立ならば
> $$V(X+Y)=V(X)+V(Y)$$
> が成り立つ．

1°　等式
$$V(X+Y)=V(X)+V(Y)$$
は無条件では成立しない．この点で定理 3 は A3.6 の定理 1 と異なる．

2°　X，Y が独立ならば，$E(XY)=E(X)E(Y)$ が成立することを用いて，

$$\begin{aligned}V(X+Y)&=E((X+Y)^2)-\{E(X+Y)\}^2\\&=E(X^2+2XY+Y^2)-\{E(X)+E(Y)\}^2\\&=E(X^2)+2E(XY)+E(Y^2)-\{E(X)\}^2\\&\qquad-2E(X)E(Y)-\{E(Y)\}^2\\&=E(X^2)-\{E(X)\}^2+E(Y^2)-\{E(Y)\}^2\\&\qquad+2\underline{\{E(XY)-E(X)E(Y)\}}\\&=V(X)+V(Y)\qquad\qquad\qquad\qquad\overset{\shortparallel}{0}\end{aligned}$$

と計算することより，定理を示すことができる．

ガイド　直接的な証明については　☞ B.323

3°　標準偏差を用いた形で述べれば，

> 2 つの確率変数 X，Y が独立ならば
> $$\sigma_{X+Y}{}^2=\sigma_X{}^2+\sigma_Y{}^2$$

4°　さらに，多数個の確率変数に関し，つぎの公式が成立する．

> X_1，X_2，……，X_n が独立ならば
> $$V(X_1+X_2+\cdots\cdots+X_m)=V(X_1)+V(X_2)+\cdots\cdots V(X_m)$$

A3.8　2項分布

数学Ⅰで学んだ重複試行を確率変数の視点から見なおしておこう．

重複試行の定理

[定理1]　ある試行において事象Eのおこる確率をp，その余事象のおこる確率を　$q=1-p$　とする．

この試行を独立にn回くり返す重複試行において，事象Eがおこる回数をXとすれば，Xの確率分布は

$$P(X=r)={}_n\mathrm{C}_r p^r q^{n-r}$$
$$(r=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n)$$

で与えられる．

1°　例　サイコロを6回ふるとき，1の目がちょうど2回出る確率は

$$p=\frac{1}{6},\ q=\frac{5}{6},\ n=6,\ r=2$$

とおいて

$$P(X=2)={}_6\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^4=\frac{3125}{15552}$$

2項分布

[定義]　nは正の整数，pは　$0<p<1$　をみたす定数　$q=1-p$　とする．

確率変数Xのとる値が0，1，2，……，nで，

$$P(X=r)={}_n\mathrm{C}_r p^r q^{n-r}$$
$$(r=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n)$$

であるとき，この確率分布のことを

確率pに対する次数nの2項分布

といい，$B(n,\ p)$という記号で表す．

1°　2項分布の確率${}_n\mathrm{C}_r p^r q^{n-r}$は$(p+q)^n$の2項定理による展開式

$${}_n\mathrm{C}_0 q^n+{}_n\mathrm{C}_1 p^1 q^{n-1}+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_r p^r q^{n-r}+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_n p^n$$

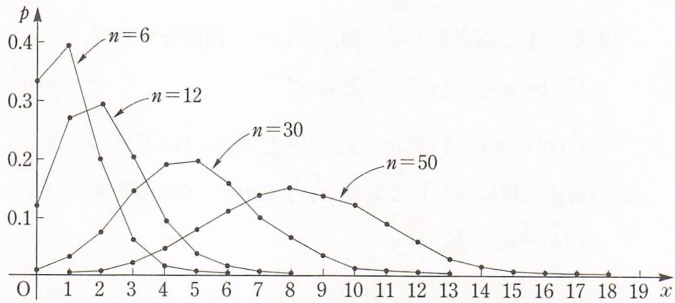
の第$(r+1)$項である．

2°　例1　硬貨を3枚投げたときの表の枚数Xの分布は，硬貨を3回投げて表の出る回数の分布と同一で，2項分布$B(3,\ 0.5)$である．

例2　ある地方で寄生虫卵保有者の比率が36％であるとする．この地方の50人について調べる場合，寄生虫卵を保有している人数をXとすると，この地方の人口が十分大きく，かつ，50人がくじで選ばれた場合なら，Xの分布は$B(50,\ 0.36)$となるであろう．

3°　2項分布に親しみをもつために，$B(n,\ p)$の折れ線グラフを例示しておこう．

サイコロをn回振るときに1の目の出る回数Xの分布は$B\left(n,\ \dfrac{1}{6}\right)$であるが，$n=6,\ 12,\ 30,\ 50$の場合を重ねて図示すると，下のようになる．



[定理2]　2項分布$B(n,\ p)$にしたがう確率変数Xの平均，および分散，標準偏差は

平　　均　$E(X)=np$

分　　散　$V(X)=npq\quad(q=1-p)$

標準偏差　$D(X)=\sqrt{npq}$

で与えられる．

2項分布の平均・分散

1°　応用上重要な定理であるが，証明には，準備あるいは，技巧がいる．

とりあえず，結果を正しく使えることが大切であろう．

例　日本人の血液型は10人に3人の割合でO型である．5人

の日本人を抽選で選んだとき，そのうちのO型の人数をXとすると，Xの分布は$B(5,\ 0.3)$で

$$平均値=5\times0.3=1.5$$

$$標準偏差=\sqrt{5\times0.3\times0.7}=\sqrt{1.05}\fallingdotseq1.02$$

である．

2°　**証明**：まず，微分法を用いる証明法を紹介する．

$B(n,\ p)$にしたがう確率変数Xにおいては，

$$p_r=P(X=r)={}_n\mathrm{C}_r p^r q^{n-r}$$

であるが，これを係数とするn次の多項式

$$f(t)=p_0+p_1t+p_2t^2+\cdots\cdots+p_nt^n=\sum_{r=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_r p^r q^{n-r}t^r$$

は2項定理によって$(q+pt)^n$とまとめることができる．すなわち，

$$f(t)=(pt+q)^n=\sum_{r=0}^{n}p_rt^r \qquad \cdots\cdots\cdots ①$$

である．①の両辺をtで1回，ついで2回微分すると，

$$f'(t)=np(pt+q)^{n-1}=\sum_{r=0}^{n}rp_rt^{r-1} \qquad \cdots\cdots\cdots ②$$

$$f''(t)=n(n-1)p^2(pt+q)^{n-2}=\sum_{r=0}^{n}r(r-1)p_rt^{r-2} \qquad \cdots\cdots\cdots ③$$

この両式で特に$t=1$とおくと，$p+q=1$であるから

$$f'(1)=np=\sum_{r=0}^{n}rp_r \qquad \cdots\cdots\cdots ④$$

$$f''(1)=n(n-1)p^2=\sum_{r=0}^{n}r(r-1)p_r \qquad \cdots\cdots\cdots ⑤$$

確率変数の平均の定義（☞ A3.4）より，④から直ちに

$$E(X)=\sum_{r=0}^{n}rp_r=np \qquad \cdots\cdots\cdots ⑥$$

が示される．ついで，④，⑤より

$$f'(1)+f''(1)=np+n(n-1)p^2=\sum_{r=0}^{n}r^2p_r=E(X^2) \qquad \cdots\cdots\cdots ⑦$$

⑥，⑦を，2乗平均と分散との関係式

$$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2 \qquad (☞ \text{A3.7})$$

に代入すれば

$$V(X)=\{np+n(n-1)p^2\}-(np)^2=np-np^2=np(1-p)=npq$$

また，標準偏差$D(X)$は

$$D(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{npq} \quad ■$$

3°　**別証**：確率変数 X_1, X_2, ……, X_n に対して

$$E(X_1+X_2+\cdots\cdots+X_n)=E(X_1)+E(X_2)+\cdots\cdots+E(X_n) \quad \cdots ①$$

が成立し，さらに，X_1, X_2, ……, X_n が独立なら

$$V(X_1+X_2+\cdots\cdots+X_n)=V(X_1)+V(X_2)+\cdots\cdots+V(X_n) \quad \cdots ②$$

が成り立つことを利用する．

X_i の値	1	0
確　率	p	q

いま，$X_i(i=1, 2, \cdots\cdots, n)$ のそれぞれが右の分布をもつとすれば

$$\left.\begin{aligned}&E(X_i)=1\cdot p+0\cdot q=p\\&V(X_i)=(1-p)^2\cdot p+(0-p)^2\cdot q=q^2p+p^2q=pq(p+q)=pq\end{aligned}\right\} \quad \cdots ③$$

である．そして，$X_i(i=1, 2, \cdots\cdots, n)$ がたがいに独立であって，

$$X=X_1+X_2+\cdots\cdots+X_n \quad \cdots\cdots\cdots ④$$

とすれば，$X=r$ とは

X_1, X_2, ……, X_n のうち r 個の $X_i=1$，残りの $X_i=0$

となることであるから，この X は2項分布 $B(n, p)$ にしたがう．

よって，①～④より

$E(X)=np$, $V(X)=npq$　をうる．■

—— A3 おわり ——



B.301

サイコロを1回振るとき，偶数の目が出る事象を E，素数の目が出る事象を F，2または3の目が出る事象を G とする．このとき，E と G，F と G はそれぞれ独立であるか，従属であるか．

解答　題意より $E=\{2,\ 4,\ 6\}$，$F=\{2,\ 3,\ 5\}$，$G=\{2,\ 3\}$．

また，$E\cap G=\{2\}$，$F\cap G=\{2,\ 3\}$ である．

サイコロの目の出方は全部で6通りだから

$$P(E)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2},\ P(F)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2},\ P(G)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

$$P(E\cap G)=\frac{1}{6},\ P(F\cap G)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

となる．これより

$$P(E)\cdot P(G)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$$

$$\therefore\quad P(E\cap G)=P(E)\cdot P(G) \qquad \cdots\cdots\cdots ①$$

$$P(F)\cdot P(G)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$$

$$\therefore\quad P(F\cap G)\neq P(F)\cdot P(G) \qquad \cdots\cdots\cdots ②$$

①，②より，E と G は独立，F と G は従属である．

B.302

1回の試行において起こる事象 E，F があり，

$P(E)=\dfrac{1}{3}$，$P(F)=\dfrac{3}{4}$，$P(E\cup F)=\dfrac{5}{6}$ のとき，次の値を求めよ．

(1)　$P(E\cap F)$　　　(2)　$P(\overline{E}\cap\overline{F})$

(3)　$P(E\cup\overline{F})$　　　(4)　$P_E(F)$

アプローチ　(1)　$P(E)$，$P(F)$，$P(E\cup F)$，$P(E\cap F)$ を結び付ける公式を利用する．

(3)　$P(E\cap\overline{F})$ を求め，同様の公式を利用する．

解答　(1)　確率に関する公式

$$P(E\cup F)+P(E\cap F)=P(E)+P(F) \cdots\cdots\cdots ①$$

から,

$$P(E\cap F)=P(E)+P(F)-P(E\cup F)$$
$$=\frac{1}{3}+\frac{3}{4}-\frac{5}{6}=\boldsymbol{\frac{1}{4}}$$

(2)　ド・モルガンの法則によると, $\overline{E}\cap\overline{F}=\overline{E\cup F}$ であるから

$$P(\overline{E}\cap\overline{F})=P(\overline{E\cup F})$$

余事象の確率公式によると

$$P(\overline{E\cup F})=1-P(E\cup F)$$

$$\therefore\quad P(\overline{E}\cap\overline{F})=1-P(E\cup F)=1-\frac{5}{6}=\frac{1}{6}$$

(3)　①でFの代りに$\overline{F}$とおくと

$$P(E\cup\overline{F})+P(E\cap\overline{F})=P(E)+P(\overline{F}) \cdots\cdots\cdots ②$$

ここで, $P(\overline{F})=1-P(F)=1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$

$$E=(E\cap F)\cup(E\cap\overline{F}),\ (E\cap F)\cap(E\cap\overline{F})=\phi$$

であるから, 排反事象の確率公式によると

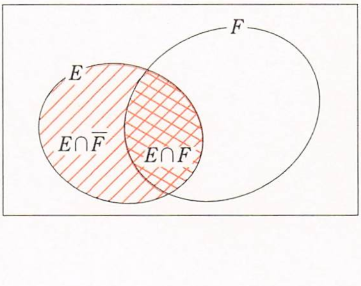
$$P(E)=P(E\cap F)+P(E\cap\overline{F})$$

$$\therefore\quad P(E\cap\overline{F})=P(E)-P(E\cap F)=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$$

これらの値を②に代入すると

$$P(E\cup\overline{F})=P(E)+P(\overline{F})-P(E\cap\overline{F})$$
$$=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{12}=\boldsymbol{\frac{1}{2}}$$

(4)　$P_E(F)=\dfrac{P(E\cap F)}{P(E)}=\dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{3}}=\boldsymbol{\dfrac{3}{4}}$



[解説]　(3)解答で用いた

$$E=(E\cap F)\cup(E\cap\overline{F}),\ (E\cap F)\cap(E\cap\overline{F})=\phi$$

は, 右の図から直観的に理解できるはずである.
さらに, これから得られる公式

$$P(E)=P(E\cap F)+P(E\cap\overline{F})$$

は, 確率の計算では役立つことが多い.

B. 303

サイコロを3回投げて，k回目に出た目が1か2のとき，$X_k=-1$，3か4のとき $X_k=0$，5か6のとき $X_k=1$ とし，$(k=1, 2, 3)$　$X=X_1+X_2+X_3$ とする．

(1)　$X=0$ となる確率を求めよ．

(2)　$X_1 \neq 0$ という条件の下で，$X=0$ となる確率を求めよ．

(3)　$X_1=X_2$ という事象をAとし，$X_2=X_3$ という事象をBとする．A とBは独立であるといえるか．

解答　**(1)**　$X=0$ となるのは順列 X_1，X_2，X_3 が，0，0，0の場合と，-1，0，1の並べ替えとなっている3!通りの場合のいずれかのときである．どの順列についても，それが起きる確率は $\left(\dfrac{2}{6}\right)^3$ であるから，求める確率は

$$(1+3!)\left(\frac{2}{6}\right)^3=\frac{7}{27}$$

(2)　$X_1=0$ となる順列 X_1，X_2，X_3 は X_2，X_3 の値のとり方だけあり，それは $3\times3=9$ 通り．

条件なしの順列 X_1，X_2，X_3 は $3\times3\times3=27$ 通りであるから，$X_1 \neq 0$ となる順列 X_1，X_2，X_3 は $27-9=18$ 通りある．このうち，$X=0$ となるのは

-1，1，0；-1，0，1；1，-1，0；1，0，-1

の4通りある．ゆえに求める確率は

$$\frac{P(X_1 \neq 0,\ X=0)}{P(X_1 \neq 0)}=\frac{4}{27}\div\frac{18}{27}=\mathbf{\frac{2}{9}}$$

(3)　$X_1=X_2$ を満たす順列は xxy $(x,\ y=-1, 0, 1)$ の9通り，$X_2=X_3$ を満たす順列も同様に9通り．

また，$X_1=X_2=X_3$ を満たす順列は

xxx $(x=-1, 0, 1)$ の3通りである．以上より

$$P(A)=P(B)=\frac{9}{27}=\frac{1}{3},\quad P(A\cap B)=\frac{3}{27}=\frac{1}{9}$$

となるので

$$P(A)P(B)=P(A\cap B)$$

ゆえに　AとBは独立である．

B.304

2つの事象 E，F において，$P(E)\neq 0$ とする．

このとき

(Ⅰ)　$P(E\cap F)=P(E)\cdot P(F)$

(Ⅱ)　$P_E(F)=P(F)$

は互いに同値であることを示せ．

解答　(Ⅱ) ⟹ (Ⅰ) の証明：

(Ⅱ)を条件つき確率の乗法定理

$$P(E\cap F)=P(E)\cdot P_E(F) \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

に代入すると(Ⅰ)を得る．

(Ⅰ) ⟹ (Ⅱ)の証明：

条件つき確率の乗法定理①に(Ⅰ)を代入すると

$$P(E)\cdot P_E(F)=P(E)\cdot P(F) \quad \cdots\cdots\cdots ②$$

仮定 $P(E)\neq 0$ より②の両辺を $P(E)$ で割ると(Ⅱ)を得る．

研究　排反事象の確率公式により

$$P(F)=P(E\cap F)+P(\overline{E}\cap F) \quad \cdots\cdots\cdots ③$$

$$P(E)+P(\overline{E})=1 \quad \cdots\cdots\cdots ④$$

はつねになりたつ．③を用いると(Ⅰ)は

$$P(F)=P(E)\cdot P(F)+P(\overline{E}\cap F)$$

と同値であり，さらに④より，(Ⅰ)は

(Ⅰ′)　$P(\overline{E}\cap F)=P(\overline{E})\cdot P(F)$

と同値である．

$P(\overline{E})\neq 0$，すなわち $P(E)\neq 1$ であれば，本問の結果より(Ⅰ′)は

(Ⅱ′)　$P_{\overline{E}}(F)=P(F)$

と同値である．さらに，これは

(Ⅲ)　$P_{\overline{E}}(F)=P_E(F)$

とも同値である．(証明せよ！)

以上まとめると，事象EとFが独立であるかどうかを調べるには，$P(E)\neq 0$，$P(E)\neq 1$ のときは，(Ⅰ)，(Ⅰ′)，(Ⅱ)，(Ⅱ′)，(Ⅲ)のいずれを調べてもよいのである．

B.305

2つの点P, Qが xy 平面上を独立に動く, 1秒ごとに, 点Pは確率 $\frac{1}{3}$ で x 座標だけが1増加する点に, 確率 $\frac{2}{3}$ で x, y 両座標が1増加する点に進み, 点Qは確率 $\frac{1}{3}$ で x 座標だけが1減少する点に, 確率 $\frac{2}{3}$ で y 座標だけが1増加する点に進む. 初めにPは(0, 0)に, Qは(5, 0)にあるものとし, 3秒後に, 点P, Qの x 座標が一致する事象を A, y 座標が一致する事象を B とする. A と B は独立であるといえるか.

アプローチ どのような事象の確率を求めればよいでしょうか？

解答 $P(A)\cdot P(B)=P(A\cap B)$ の成立することが A と B が独立であることの定義であるから, $P(A)$, $P(B)$, $P(A\cap B)$ を調べる.

$P(A)$：3秒後のPの x 座標は3であるから, A が起こるのは, Qが3回のうち2回 x 座標を1減少する方向に動く場合である. よって

$$P(A)={}_3C_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{2}{9}$$

$P(B)$：P, Qの y 座標は0, 1, 2, 3のいずれかである. 3秒後P, Qの y 座標がともに $k\,(0\leqq k\leqq 3)$ である事象を B_k とすると, その確率は, PとQが互いに独立に動くから

$$P(B_k)=\left({}_3C_k\left(\frac{2}{3}\right)^k\left(\frac{1}{3}\right)^{3-k}\right)\times\left({}_3C_k\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^k\left(\frac{1}{3}\right)^{3-k}\right)$$

である. B_0, B_1, B_2, B_3 は互いに排反であり, $B=B_0\cup B_1\cup B_2\cup B_3$ であるから

$$\begin{aligned}P(B)&=P(B_0)+P(B_1)+P(B_2)+P(B_3)\\&=\left\{1\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3\right\}^2+\left\{3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)\right\}^2\\&\quad+\left\{3\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^2\right\}^2+\left\{1\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^3\right\}^2\\&=\frac{245}{729}\end{aligned}$$

$P(A\cap B)$：Aが起こるときQのy座標は1であるから，Bも起こるためにはPのy座標が1であることが必要十分である．いいかえると $A\cap B$ が起こるのは，3秒後のP，Qの座標がともに(3, 1)となるときであり，これは，P，Qともに3回のうち1回y座標が1増加する方向に進む，という事象である．よって，その確率は

$$P(A\cap B)={}_3\mathrm{C}_1\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^2\times{}_3\mathrm{C}_1\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^2$$

$$=\frac{4}{81}$$

となる．

以上より

$$P(A\cap B)\neq P(A)\cdot P(B)$$

がわかる．すなわち，AとBは独立でない．

研究　$P(A)\neq 0$ は明らかだから，

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$$

の代わりに

$$P(B)=P_A(B)$$

を調べてもよい．

事象Aは3秒後にQが(3, 1)にいるという事象であり，この下でBが起こる条件つき確率は，Pが(3, 1)にいる事象Cの確率である．($A\cap B=A\cap C$ であるが，Aは点Qの動き方のみ，Cは点Pの動き方のみで表現される事象なので，AとCは独立，よって
$(P_A(B)=)P_A(C)=P(C)$ となるのである．)　$P(C)$は

$$P(C)={}_3C_1\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{2}{9}$$

とただちに求まる．

B.306

Ｉの袋には赤玉3個，白玉4個，IIの袋には赤玉5個，白玉2個が入っている．Ｉの袋から1個を取り出して，IIの袋に入れ，よく混ぜてから1個を取り出るとき，それが白玉である確率を求めよ．

解答　「Ｉの袋から赤玉，白玉を取り出す」事象をそれぞれ A，B．

また，「IIの袋から白玉を取り出す」事象を C とする．

事象 C が起こるのは

$A\cap C$「Ｉの袋から赤玉，次にIIの袋から白玉をとり出す」，

$B\cap C$「Ｉの袋から白玉，次にIIの袋から白玉をとり出す」

のいずれかの場合に限られる．つまり，

$$C=(A\cap C)\cup(B\cap C).$$

▶ $A\cap C$，$B\cap C$ ではＩから取り出す玉の色が異なる．

また，$A\cap C$ と $B\cap C$ は互いに排反であるから

$$P(C)=P(A\cap C)+P(B\cap C) \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

A，B が起こったとき，IIの袋にはそれぞれ，赤玉6個，白玉2個；赤玉5個，白玉3個が入っているから，このとき白玉を取り出す確率 $P_A(C)$，$P_B(C)$ はそれぞれ

$$P_A(C)=\frac{2}{6+2}=\frac{2}{8},$$

$$P_B(C)=\frac{3}{5+3}=\frac{3}{8} \quad \cdots\cdots\cdots ②$$

乗法定理と②より

▶ ここでは，約分しない方がよい．

$$P(A\cap C)=P(A)\cdot P_A(C)=\frac{3}{7}\cdot\frac{2}{8}=\frac{6}{56} \quad \cdots\cdots\cdots ③$$

$$P(B\cap C)=P(B)\cdot P_B(C)=\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{8}=\frac{12}{56} \quad \cdots\cdots\cdots ④$$

③，④を①に代入すると

$$P(C)=\frac{6}{56}+\frac{12}{56}=\frac{18}{56}=\boldsymbol{\frac{9}{28}}$$

B. 307

A の箱には赤玉1個，青玉2個，白玉3個が入っている．B の箱には10本のクジが入っていて，そのうち3本が当りクジである．A の箱から1個の球を取り，それが赤であれば同時に3本，青であれば同時に2本，白であれば1本のクジをBの箱から引けるものとする．

(1)　ちょうど1本当る確率を求めよ．

(2)　少なくとも1本当る確率を求めよ．

アプローチ (2)「少なくとも……」の確率を求めるときには，余事象の確率から求めるのが定石です．

解答　A の箱から取り出した1個の球の色が i)赤，ii)青，iii)白である確率はそれぞれ $\frac{1}{6}$，$\frac{2}{6}$，$\frac{3}{6}$ である．

(1)　i)，ii)　iii)のもとで，B の箱からクジを3本，2本，1本引くことになるが，ちょうど1本だけが当る確率は，それぞれ，

$$\frac{{}_3C_1\cdot{}_7C_2}{{}_{10}C_3}=\frac{21}{40},\quad \frac{{}_3C_1\cdot{}_7C_1}{{}_{10}C_2}=\frac{7}{15},\quad \frac{{}_3C_1}{{}_{10}C_1}=\frac{3}{10}$$

である．

i)，ii)，iii)は互いに排反であるから，求める確率は

$$\frac{1}{6}\cdot\frac{21}{40}+\frac{2}{6}\cdot\frac{7}{15}+\frac{3}{6}\cdot\frac{3}{10}=\mathbf{\frac{283}{720}}$$

◁条件つき確率の乗法定理を暗黙のうちに使用している．

(2)　事象「少なくても1本当る」の余事象「はずれクジばかりを引く」の確率を，まず計算する

i)，ii)，iii)のもととで，はずれクジばかりを引く確率は，それぞれ

$$\frac{{}_7C_3}{{}_{10}C_3}=\frac{7}{24},\quad \frac{{}_7C_2}{{}_{10}C_2}=\frac{7}{15},\quad \frac{{}_7C_1}{{}_{10}C_1}=\frac{7}{10}$$

である．i)，ii)，iii)は互いに排反であるから，はずれクジばかりを引く確率は

$$\frac{1}{6}\cdot\frac{7}{24}+\frac{2}{6}\cdot\frac{7}{15}+\frac{3}{6}\cdot\frac{7}{10}=\frac{133}{240}$$

よって，求める確率は $1-\frac{133}{240}=\mathbf{\frac{107}{240}}$

B. 308

ある池にマブナ 30 匹，マゴイ 20 匹，ヒブナ 10 匹，ヒゴイ 15 匹がいる．この池から一匹取り出したら，朱色の魚であった．それがフナである確率を求めよ．

解答　朱色の魚（ヒブナ，ヒゴイ）は全部で 25 匹いて，そのうちフナ（ヒブナ）は 10 匹である．よって求める確率は

$$\frac{10}{25}=\mathbf{\frac{2}{5}}$$

[解説]　取り出した一匹が，「フナである」事象を E，「朱色の魚である」事象を F とする．求めている確率は，「朱色の魚であることがわかったときに，それがフナである」という確率，つまり条件つき確率 $P_F(E)$ である．乗法定理によると，$P(E\cap F)=P(F)\cdot P_F(E)$……$(*)$ であり，$P(E\cap F)$，$P(F)$ はそれぞれ取り出した一匹が「ヒブナである」「朱色の魚である」確率を表すから，

$$P(E\cap F)=\frac{10}{75}=\frac{2}{15},\quad P(F)=\frac{25}{75}=\frac{1}{3}$$

となる．

$(*)$ より，$P_F(E)=\dfrac{P(E\cap F)}{P(F)}=\dfrac{2}{15}\cdot\dfrac{3}{1}=\dfrac{2}{5}$

を得る．

このようにして答えを導き出すこともできる．

B. 309

外見が同じ 15 個の箱があり，このうち 10 箱には白玉だけ 6 個，残りの 5 箱には白玉 4 個と赤玉 2 個が入っている．いま，1 箱を任意に選びその中から 2 個の玉を取り出したところ，2 個とも白玉であった．この箱に赤玉が入っていない確率を求めよ．

アプローチ　条件つき確率の乗法定理

$$P(A\cap B)=P(A)P_A(B)$$

より，$P(A\cap B)$，$P(A)$，$P_A(B)$ のうち 2 つがわかると，残りの 1 つもわかります．

解答　事象 A，B，C を

A「白玉だけが入っている箱を選ぶ」

B「白玉，赤玉が入っている箱を選ぶ」

C「取出した 2 個の玉がいずれも白玉である」

とする．

求める確率は，「事象 C が起こったもとで，A が起こる」という条件つき確率 $P_C(A)$ である．

◁時間的には，C は A よりあとに起こる事象ではあるが，条件つき確率 $P_C(A)$ を考えることができる．

条件つき確率の乗法定理から

$$P(A\cap C)=P(C)\cdot P_C(A) \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

であるから，$P(A\cap C)$，$P(C)$ がわかると，$P_C(A)$ は求まる．

事象 C が起こるのは，白玉だけの箱を選び，白玉 2 個を取り出すかまたは，白玉，赤玉の箱を選び，白玉 2 個を取り出すかのいずれかの場合に限られる．

つまり，$C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$

ここで，

$$P(A\cap C)=P(A)\cdot P_A(C)=\frac{10}{15}\cdot\frac{{}_6C_2}{{}_6C_2}=\frac{2}{3}$$

$$P(B\cap C)=P(B)\cdot P_B(C)=\frac{5}{15}\cdot\frac{{}_4C_2}{{}_6C_2}=\frac{2}{15}$$

$$\therefore \quad P(C)=P(A\cap C)+P(B\cap C)=\frac{2}{3}+\frac{2}{15}=\frac{4}{5}$$

◁$A\cap C$ と $B\cap C$ は排反であるから，排反事象の確率公式が成り立つ．

以上の結果を①に代入すると

$$\frac{2}{3}=\frac{4}{5}\cdot P_C(A) \quad \therefore \quad P_C(A)=\mathbf{\frac{5}{6}}$$

[**解説**]　「15 箱のうち，赤玉が入っていない箱が 10 箱あるのだから，求めている確率は $\frac{10}{15}=\frac{2}{3}$」と答えては，この問題の意味を全く理解していないことになる．

この問題では，“取り出した 2 個の玉がいずれも白玉であった”という情報のおかげで，選んだ箱に関してより良い判定材料が得られることがわかる．つまり，単に 15 箱から 1 箱選んだとき，それに赤玉が入っていない確率は $\frac{2}{3}$ であるが，上の情報のもとでは，その確率は $\frac{5}{6}$ まで高まるのである．

B.310

ある事件の裁判で，証人AとBは，その事件が起きた，といい，証人Cは起こらなかった，と述べた．

いま，証人A，B，Cが真実を述べる確率が，それぞれ $\frac{4}{5}$，$\frac{5}{7}$，$\frac{8}{9}$ であるならば，事件は実際に起きたと結論すべきか．

アプローチ　証言が行われる前の段階で，事件が起こった確率がどのくらいと考えられていたかが問題となります．証言があったという条件下で，その確率がどう変わるでしょうか．

解答　事件が起きるという事象をKで表し，その確率 $P(K)$ を p とおく．

また，「AとBが事件は起きたと証言し，Cが事件は起きなかったと証言する」という事象をLで表すことにする．上の証言の下で事件が起きた確率は $P_L(K)$ と考えられる．

$$P_K(L)=\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{7}\cdot\left(1-\frac{8}{9}\right)=\frac{4}{63}$$

$$P_{\overline{K}}(L)=\left(1-\frac{4}{5}\right)\cdot\left(1-\frac{5}{7}\right)\cdot\frac{8}{9}=\frac{16}{315}$$

より

$$\begin{aligned}P(L)&=P(K\cap L)+P(\overline{K}\cap L)\\&=P(K)\,P_K(L)+P(\overline{K})\,P_{\overline{K}}(L)\\&=p\times\frac{4}{63}+(1-p)\frac{16}{315}\\&=\frac{16}{315}+\frac{4}{315}p\end{aligned}$$

よって，

$$\begin{aligned}P_L(K)&=\frac{P(K\cap L)}{P(L)}\\&=\frac{P(K)\,P_K(L)}{P(L)}\\&=\frac{p\cdot\frac{4}{63}}{\frac{16}{315}+\frac{4}{315}p}\end{aligned}$$

$$=\frac{5p}{4+p}$$

である.

事件が起きたと結論すべきなのは，これが $\frac{1}{2}$ より大の場合であるから，

$$P_L(K)=\frac{5p}{4+p}\geqq\frac{1}{2}\iff p\geqq\frac{4}{9}$$

より，事件の起きた確率を p とするとき

$p>\frac{4}{9}$ ならば　事件は起きた

$p<\frac{4}{9}$ ならば　事件は起きなかった

と結論すべきである.

研究　上の論法は，$P(K)$，$P_K(L)$，$P_{\overline{K}}(L)$ がわかっているなら，$P_L(K)$ が求まる，というものである.

より一般に，全事象(＝標本空間全体)を Ω とし，Ω が互いに排反な事象 E_1，E_2，……，E_n の和となっているとする．事象 A に対し，A は互いに排反な事象 $A\cap E_1$，$A\cap E_2$，……，$A\cap E_n$ の和になっているので

$$P(A)=P(A\cap E_1)+P(A\cap E_2)+\cdots\cdots+P(A\cap E_n)$$

一方

$$P(A\cap E_i)=P(E_i)\,P_{E_i}(A)$$

であるから

$$P_A(E_i)=\frac{P(A\cap E_i)}{P(A)}$$

は

$$P_A(E_i)=\frac{P(E_i)\,P_{E_i}(A)}{P(E_1)\,P_{E_1}(A)+P(E_2)\,P_{E_2}(A)+\cdots\cdots+P(E_n)\,P_{E_n}(A)}$$

と表される(ベイズの定理)．$P(E_j)$，$P_{E_j}(A)$ がわかれば $P_A(E_i)$ も求まるのである.

B. 311

赤玉3個と白玉5個が入っている袋がある．この袋から玉を1個取り出し，その色のいかんにかかわらず白玉1個をこの袋へ入れるという操作を操り返す．

2回目までに少なくとも1回は赤玉が取り出されたことがわかっているとき，3回目に赤玉が取り出される確率を求めよ．

解答 2回目までに少なくとも1回は赤玉が取り出されるという事象をA，3回目に赤玉が取り出されるという事象をBで表すことにする．求める確率は条件付き確率 $P_A(B)$ であり，これは

$$P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$$

によって求められる．

まず $P(A)$ を求める．事象Aは，2回玉を取りだした結果が㊖㊖，㊖㊗，㊗㊖のいずれかとなる場合である．その確率はそれぞれ

㊖㊖ …… $\frac{3}{8}\times\frac{2}{8}=\frac{6}{64}$

㊖㊗ …… $\frac{3}{8}\times\frac{6}{8}=\frac{18}{64}$

㊗㊖ …… $\frac{5}{8}\times\frac{3}{8}=\frac{15}{64}$

であるから，

$$P(A)=\frac{6}{64}+\frac{18}{64}+\frac{15}{64}=\frac{39}{64}$$

次に $P(A\cap B)$ を求める．事象 $A\cap B$ は3回玉を取り出した結果が㊖㊖㊖，㊖㊗㊖，㊗㊖㊖のいずれかとなる場合である．よって

$$P(A\cap B)=P(㊖㊖㊖)+P(㊖㊗㊖)+P(㊗㊖㊖)$$
$$=\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{8}\cdot\frac{1}{8}+\frac{3}{8}\cdot\frac{6}{8}\cdot\frac{2}{8}+\frac{5}{8}\cdot\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{8}$$
$$=\frac{72}{512}=\frac{9}{64}$$

以上より，

$$P_A(B)=\mathbf{\frac{9}{39}}$$

B. 312

ある工作機械が故障した日の翌日再び故障する確率は $\dfrac{1}{3}$，故障しなかった日の翌日再び故障しない確率は $\dfrac{1}{2}$ であるという．今日，この機械は故障した．4日後この機械が故障する確率を求めよ．

アプローチ ある日に故障する確率は前日の状態によって定まると考えます．「4日後」という具体的な日における確率を問うていますが，「n 日後」「$n+1$ 日後」を先に考える必要があります．

解答　n 日後に故障するという事象を B_n で表すことにする．このとき，

$$P(B_{n+1})=P(B_n\cap B_{n+1})+P(\overline{B_n}\cap B_{n+1})$$

◀ 排反事象の確率公式

$$=P(B_n)P_{B_n}(B_{n+1})+P(\overline{B_n})P_{\overline{B_n}}(B_{n+1})$$

◀ 条件付き確率の乗法公式

であるが，問題文中の条件より

$$P_{B_n}(B_{n+1})=\frac{1}{3},\quad P_{\overline{B_n}}(\overline{B_{n+1}})=\frac{1}{2}$$

であるから

$$P(B_{n+1})=P(B_n)\cdot\frac{1}{3}+(1-P(B_n))\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right)$$

$$=-\frac{1}{6}P(B_n)+\frac{1}{2}\quad\cdots\cdots\text{①}$$

◀ $P(\overline{B_n})=1-P(B_n)$
$P_{\overline{B_n}}(B_{n+1})=1-P_{\overline{B_n}}(\overline{B_{n+1}})$

となる．

漸化式①を $P(B_0)=1$ の下で解く．

◀ 順に $P(B_1)$，$P(B_2)$，$P(B_3)$，$P(B_4)$ と求めるにしても①は用意せねばなるまい．

①は

$$P(B_{n+1})-\frac{3}{7}=-\frac{1}{6}\left(P(B_n)-\frac{3}{7}\right)$$

と変形できるので

$$P(B_n)-\frac{3}{7}=\left(-\frac{1}{6}\right)^n\left(P(B_0)-\frac{3}{7}\right)$$

ゆえに

$$P(B_n)=\frac{3}{7}+\left(-\frac{1}{6}\right)^n\frac{4}{7}$$

である．とくに $n=4$ のとき

$$P(B_4)=\boldsymbol{\frac{3}{7}}+\left(-\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{6}}\right)^4\boldsymbol{\frac{4}{7}}$$

B. 313

低い方から順に 0, 1, 2, 3, …… と通し番号のついた階段を，サイコロを繰り返し振りながら次の規則：

1～5のいずれかの目が出た場合は1つ上の段に立つ

6の目が出た場合は2つ上の段に立つ

に従って登るものとする．最初は0番の段に立っているものとし，何度かサイコロを振った後で n 番の段に立つ確率を p_n とする．p_n を n で表せ．なお，$p_0=1$ とみなす．

アプローチ　「$n+2$ 番目の段に立つのは n 番目の段から2段上がるか $n+1$ 番目の段から1段上がるかのいずれかの場合であるから，

$$p_{n+2}=\frac{5}{6}p_{n+1}+\frac{1}{6}p_n \quad \cdots\cdots ①$$

が成り立つ」という考えもありますが，…

解答　n 番目の段に立つことなく通過するという事象は $1-p_n$ であり，またこの事象は，$n-1$ 番の段に立ちかつその後一度に2つ上の段に立つという事象でもあるから

$$1-p_n=\frac{1}{6}p_{n-1} \quad \cdots\cdots ②$$

が成立する．これを変形すると

$$p_n-\frac{6}{7}=-\frac{1}{6}\left(p_{n-1}-\frac{6}{7}\right)$$

となり，

$$p_n-\frac{6}{7}=\left(-\frac{1}{6}\right)^n\left(p_0-\frac{6}{7}\right)=\frac{1}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^n$$

よって

$$p_n=\boldsymbol{\frac{6}{7}+\frac{1}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^n}$$

となる．

研究　一般に $p_{n+2}=\alpha p_{n+1}+\beta p_n$ なる三項間漸化式は $\alpha+\beta=1$ のとき，$p_{n+2}+\beta p_{n+1}=p_{n+1}+\beta p_n$ と変形できるので

$$p_{n+2}+\beta p_{n+1}=p_1+\beta p_0 \ (=p_2+\beta p_1=\cdots\cdots)$$

なる二項間漸化式に還元される．$\left(\text{本問は } \alpha=\frac{5}{6},\ \beta=\frac{1}{6} \text{ の場合}\right)$

B. 314

平面上に正四面体が置いてある．平面と接している面の3辺の1つを任意に選び，これを軸として正四面体をたおす．n回の操作の後に，最初に平面に接していた面が再び平面と接する確率を求めよ．

アプローチ 最初に平面と接していた面に関する確率だけでなく他の3面に関する同様の確率を同時に考えます．

解答 最初に平面と接していた面をA，他の3面をそれぞれB，C，Dと文字を振りあてておく．
n回の操作の後に，面Aが平面と接する確率をa_nとおく．面B，C，Dについて同様の確率をそれぞれ，b_n，c_n，d_nとおく．

$n+1$回の操作で面Aが平面に接するのはn回の操作後に，面B，C，Dのいずれかが平面に接していた場合である．また，接する面が一回の操作で他の3面に代わる確率は，3面それぞれ等しく$\frac{1}{3}$である．よって

$$a_{n+1}=\frac{1}{3}b_n+\frac{1}{3}c_n+\frac{1}{3}d_n \quad \cdots\cdots①$$

が成りたつ．　$a_n+b_n+c_n+d_n=1$　を考えて①より

$$a_{n+1}=\frac{1}{3}(1-a_n) \quad \cdots\cdots②$$

となる．②は，

$$a_{n+1}-\frac{1}{4}=-\frac{1}{3}\left(a_n-\frac{1}{4}\right)$$

と変形することによって

$$a_n-\frac{1}{4}=\left(-\frac{1}{3}\right)^n\left(a_0-\frac{1}{4}\right)$$

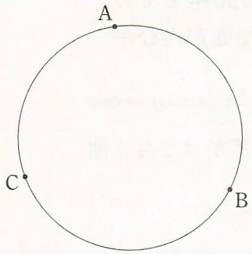
となり，$a_0=1$を考え合わせると

◁最初はAが平面に接している．

$$\boldsymbol{a_n=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}} \quad \boldsymbol{(n\geqq 0)}$$

これが求める確率である．

B. 315



円周上に，右回りの順で3点A，B，Cがあり，円周に沿ってこれらの点の上を右回りに進むものとする．1つのサイコロを投げて，偶数の目が出ればその数だけ進み，奇数ならば1つ進む試行を繰り返す．初めAにいて，n 回の試行の後で A にいる確率を p_n，B にいる確率を q_n，C にいる確率を r_n として，次の問いに答えよ．

(1) p_n を $r_{n-1}(n \geqq 2)$ で表せ．

(2) p_{3n}，p_{3n+1}，p_{3n+2} を求めよ．

解答 (1) 1回の試行で進む距離1，2，4，6のいずれかであり，その確率は，それぞれ

$$\frac{1}{2},\ \frac{1}{6},\ \frac{1}{6},\ \frac{1}{6}$$

である．

n 回目の試行後に点が A にいるのは

$$\begin{cases} n-1 \text{ 回目にAにいて，次に6移動} \\ n-1 \text{ 回目にBにいて，次に2移動} \\ n-1 \text{ 回目にCについて，次に1または4移動} \end{cases}$$

する場合である．

よって，

$$p_n = \frac{1}{6}p_{n-1} + \frac{1}{6}q_{n-1} + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\right)r_{n-1}$$

$$= \frac{1}{6}(p_{n-1} + q_{n-1} + r_{n-1}) + \frac{1}{2}r_{n-1}$$

$p_n + q_n + r_n = 1$ ▶

$$= \mathbf{\frac{1}{6} + \frac{1}{2}r_{n-1}}$$

(2) (1)と同様に考えて，または円を120°，240°回転させて，A，B，Cを入替えたと見なすことより，

$$q_n=\frac{1}{6}+\frac{1}{2}p_{n-1},\quad r_n=\frac{1}{6}+\frac{1}{2}q_{n-1}$$

を得る．ゆえに，

$$\begin{aligned}p_{3n}&=\frac{1}{6}+\frac{1}{2}r_{3n-1}\\&=\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{2}q_{3n-2}\right)\\&=\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{2}p_{3n-3}\right)\right\}\\&=\frac{7}{24}+\frac{1}{8}p_{3(n-1)}\end{aligned}$$

これは数列$\{p_{3n}\}$の漸化式である．

$$p_{3n}-\frac{1}{3}=\frac{1}{8}\left(p_{3(n-1)}-\frac{1}{3}\right)$$

と変形し，$p_0=1$　と考え合せると

◀最初はAにいる．

$$p_{3n}-\frac{1}{3}=\left(\frac{1}{8}\right)^n\left(\frac{2}{3}\right)$$

$$\therefore\quad p_{3n}=\mathbf{\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{8}\right)^n\left(\frac{2}{3}\right)}$$

となる．

同様にして

$$p_{3n+1}-\frac{1}{3}=\left(\frac{1}{8}\right)^n\left(p_1-\frac{1}{3}\right)$$

$$p_{3n+2}-\frac{1}{3}=\left(\frac{1}{8}\right)^n\left(p_2-\frac{1}{3}\right)$$

がなりたつ．

$$p_1=\frac{1}{6}+\frac{1}{2}r_0=\frac{1}{6}$$

$$\begin{aligned}p_2&=\frac{1}{6}+\frac{1}{2}r_1=\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{2}q_0\right)\\&=\frac{1}{4}\end{aligned}$$

より

$$p_{3n+1}=\mathbf{\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\left(\frac{1}{8}\right)^n}$$

$$p_{3n+2}=\mathbf{\frac{1}{3}-\frac{1}{12}\left(\frac{1}{8}\right)^n}$$

B. 316

2個の白球の入った袋Aと1個の白球と2個赤球の入った袋Bがある．袋Aから無作為に1個の球を取り出して袋Bに入れ，続いて袋Bから無作為に1個の球を取り出して袋Aに入れる．これを1回の操作と数える．この操作をn回繰り返したとき，袋Aの中が赤球2個となる確率をp_n，袋Aの中が赤球1個，白球1個となる確率をq_n($n=1$，2，3，……)とする．

(1)　p_1，q_1を求めよ．

(2)　p_n，q_nをp_{n-1}，q_{n-1}で表せ．

(3)　p_n，q_nを求めよ．

解答　(1)　1回の操作でAの赤球が0個からいきなり2個になることはない．すなわち，

$$p_1=\mathbf{0} \qquad \cdots\cdots①$$

である．

また，1回目の操作後にAの赤球が1個となるのは

A(白)(白) $\xrightarrow[\text{確率}\,1]{(白)}$ B(赤)(赤)(白)(白) $\xrightarrow[\text{確率}\frac{2}{4}]{(赤)}$ A(赤)(白)

となる場合であるから，

$$q_1=1\times\frac{2}{4}=\mathbf{\frac{1}{2}}$$

(2)　n回目の操作でAの赤球が2個となるのは

A(赤)(赤) $\xrightarrow[1]{(赤)}$ B(赤)(白)(白)(白) $\xrightarrow[\frac{1}{4}]{(赤)}$ A(赤)(赤)

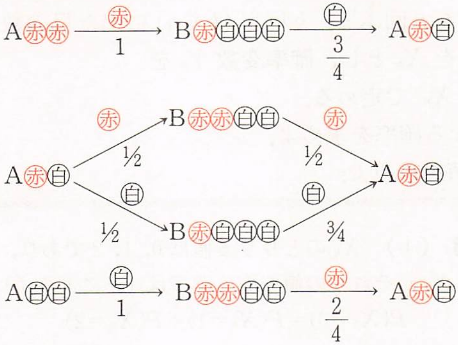
A(赤)(白) $\xrightarrow[\frac{1}{2}]{(白)}$ B(赤)(白)(白)(白) $\xrightarrow[\frac{1}{4}]{(赤)}$ A(赤)(赤)

の2つの場合だから

$$p_n=\frac{1}{4}\cdot 1p_{n-1}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot q_{n-1}$$

$$=\mathbf{\frac{1}{4}p_{n-1}+\frac{1}{8}q_{n-1}} \qquad \cdots\cdots②$$

n回目の操作でAの赤球が1個となるのは



の4つの場合だから

$$q_n=\frac{3}{4}\cdot 1\cdot p_{n-1}+\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\right)q_{n-1}$$

$$+\frac{2}{4}\cdot 1(1-p_{n-1}-q_{n-1})$$

$$=\boldsymbol{\frac{1}{4}p_{n-1}+\frac{1}{8}q_{n-1}+\frac{1}{2}} \quad \cdots\cdots\cdots ③$$

(3)　②−③を考えると

$$p_n-q_n=-\frac{1}{2}$$

$$\therefore\quad q_n=p_n+\frac{1}{2}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots) \quad \cdots\cdots\cdots ④$$

これを②に代入すると

$$p_n=\frac{1}{4}p_{n-1}+\frac{1}{8}\left(p_{n-1}+\frac{1}{2}\right)$$

$$=\frac{3}{8}p_{n-1}+\frac{1}{16}$$

$$p_n-\frac{1}{10}=\frac{3}{8}\left(p_{n-1}-\frac{1}{10}\right)$$

①より

$$p_n-\frac{1}{10}=\left(\frac{3}{8}\right)^{n-1}\left(-\frac{1}{10}\right)$$

◀ $p_1=0$

$$p_n=\boldsymbol{\frac{1}{10}\left\{1-\left(\frac{3}{8}\right)^{n-1}\right\}}$$

これを④に代入すると

$$q_n=\boldsymbol{\frac{1}{10}\left\{6-\left(\frac{3}{8}\right)^{n-1}\right\}}$$

B.317

1つのサイコロを n 回ふる．k 回目 $(k \leqq n)$ に出た目の数を3で割った余りを X_k とし，確率変数 Y_n を
$Y_n = X_1 \cdot X_2 \cdot \cdots\cdots \cdot X_n$ で定める．

(1)　$Y_5 = 2^3$ となる確率を求めよ．

(2)　Y_n の期待値を求めよ．

解答　(1)　X_k のとりうる値は 0, 1, 2 であり，また，X_k がそれらの値を取る確率は（k によらず）

$$P(X_k=0)=P(X_k=1)=P(X_k=2)$$
$$=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

である．

確率変数 $Y_5 = X_1 \cdot X_2 \cdot X_3 \cdot X_4 \cdot X_5$ が 2^3 という値をとるということは，順列 $(X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4,\ X_5)$ が $(1,\ 1,\ 2,\ 2,\ 2)$ の並べかえで得られる．ということである．

各順列の得られる確率はどの順列も

$$\left(\frac{1}{3}\right)^5$$

であり，また順列の種類は

2つの1を並べる場所の選び方の総数 ▶

$${}_5\mathrm{C}_2=\frac{5!}{2!3!} \text{ 通り}$$

ある．ゆえに求める確率は

$$\frac{5!}{2!3!}\times\left(\frac{1}{3}\right)^5=\mathbf{\frac{10}{243}}$$

(2)　Y_n のとりうる値は0，または $2^l\ (0 \leqq l \leqq n)$ である．Y_n が値 2^l をとる確率を(1)と同様の方法で求めると

$${}_n\mathrm{C}_l\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

となるので，Y_n の期待値は

$$E(Y_n)=\sum_{l=0}^{n}2^l\cdot P(Y_n=2^l)$$

◀ $Y_n=0$ となる確率は考えなくて済む.

$$=\left(\frac{1}{3}\right)^n\sum_{l=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_l 2^l$$

$$=\left(\frac{1}{3}\right)^n(1+2)^n$$

◀ $(1+x)^n=\sum_{l=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_l x^l$

$$=1$$

となる.

研究　A篇で2つの確率変数 X, Y が独立であることの定義, ならびに, そのような確率変数の期待値に関し,

$$E(XY)=E(X)E(Y)$$

がなりたつことを説明した.

3つ以上の確率変数 X, Y, ……, Z に関して, これらが独立であることを

いかなる値 x, y, ……, z に対しても

$P(X=x$ かつ $Y=y$ かつ, …… $Z=z)$

$=P(X=x)\cdot P(Y=y)\cdots\cdots P(Z=z)$

がつねに成立する.

こととして定義するのは自然である(どうしてか?).

このとき

$$E(XY\cdots\cdots Z)=E(X)E(Y)\cdots\cdots E(Z)$$

が成立することが容易に確められる.

本問において, X_1, ……, X_n は上の意味で独立である. 各 X_i に対し,

$$E(X_i)=\frac{1}{3}\times1+\frac{1}{3}\times2+\frac{1}{3}\times0$$

$$=1$$

であるから, 上で述べた結果を用いると

$$E(Y_n)=1$$

はただちに導かれる.

B. 318

袋Aの中に赤い玉3個，黒い玉2個，袋Bの中には白い玉3個，緑の玉2個が入っている．Aから玉を2個同時に取り出したときの赤い玉の個数をX，Bから玉を2個同時に取り出したときの緑の玉の個数をYとする．次の問いに答えよ．

(1)　Xの平均と分散を求めよ．

(2)　$Z=X+3Y$ とおく．Zの平均と分散を求めよ．

アプローチ　分散の値を求めるには，定義に戻って計算するより，A3.7の定理を用いてみましょう．

解答　(1)　Xのとり得る値は$X=0,\ 1,\ 2$ であり，$X=k$ となる確率は

$$P(X=k)=\frac{{}_3C_k\cdot{}_2C_{2-k}}{{}_5C_2}\quad (k=0,\ 1,\ 2)$$

で与えられるので，左のような確率分布が得られる．

Xの値	0	1	2
確　率	$\frac{1}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{3}{10}$

ゆえに，Xの平均$E(X)$は

$$E(X)=1\cdot\frac{6}{10}+2\cdot\frac{3}{10}=\frac{6}{5}$$

さらに，

$$E(X^2)=1^2\cdot\frac{6}{10}+2^2\frac{3}{10}=\frac{9}{5}$$

であるから，Xの分散$V(X)$は

A3.7 定理1 ▶
$$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$$
$$=\frac{9}{5}-\left(\frac{6}{5}\right)^2=\mathbf{\frac{9}{25}}$$

(2)　Yのとり得る値は0，1，2であり，$Y=l$ となる確率は，

$$P(Y=l)=\frac{{}_2C_l\cdot{}_3C_{2-l}}{{}_5C_2}\quad (l=0,\ 1,\ 2)$$

で与えられるので左のような確率分布が得られる．

Yの値	0	1	2
確　率	$\frac{3}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{1}{10}$

ゆえに，Yの平均，分散は

$$E(Y)=1\cdot\frac{6}{10}+2\cdot\frac{1}{10}=\frac{4}{5}$$

$$V(Y)=E(Y^2)-\{E(Y)\}^2$$
$$=\left(0^2\times\frac{3}{10}+1^2\times\frac{6}{10}+2^2\times\frac{1}{10}\right)-\left(\frac{4}{5}\right)^2$$
$$=1-\frac{16}{25}=\frac{9}{25}$$

◀ A3.7 定理 1

となる．

ゆえに，$Z=X+3Y$ の平均は

$$E(Z)=E(X)+3E(Y)$$
$$=\frac{6}{5}+3\cdot\frac{4}{5}=\mathbf{\frac{18}{5}}$$

また，Z の分散は

$$V(Z)=V(X)+V(3Y)$$
$$=V(X)+3^2V(Y)$$
$$=\frac{9}{25}+3^2\cdot\frac{9}{25}=\mathbf{\frac{18}{5}}$$

◀ X と Y (正確には X と $3Y$) は独立

注意　欄外で注意した「X と $3Y$ は独立」は，もちろん，Aから 2 個玉をとる試行とBから 2 個玉をとる試行とが独立である，という当然の事実からの帰結である．

XとYが独立ならば $V(X+Y)$ を求めるのにXとYそれぞれの確率分布さえわかればよい (特に公式 $V(X+Y)=V((X)+V(Y)$ が成立する) が，X，Y が独立でない場合は，X，Y が標本空間上のいかなる関数であるか (すなわち各根元事象にいかなる値が対応するか) という点まで立ち戻らねばならない．

B. 319

サイコロを投げて，1，2，3，4のいずれかの目が出ると，点Pは数値線上を+1だけ進み，5，6のいずれかが出ると，−1だけ進む．このとき，次の問いに答えよ．

(1)　原点から出発し，n回投げたとき，点Pの位置Xのとりうる値を求めよ．

(2)　原点から出発し，5回投げたとき，点Pの位置が+3である確率を求めよ．

(3)　$Y=\dfrac{X+n}{2}$ とおくとき，n回投げたときのYの期待値，分散を求めよ．

(4)　n回投げたときのXの期待値，分散を求めよ．

アプローチ　n回のうち+1の方向へk回，−1の方向へ$(n-k)$回進むと，Pの座標は？

解答　(1)　サイコロを1回投げるという試行において，1，2，3，4のいずれかの目が出る，すなわちPが+1進むという事象をF，5，6のいずれかの目が出る，すなわちPが−1進むという事象をBで表す．

$$P(F)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3},\ P(B)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

である．

Pの位置Xはn回のうち何回Fが起こったかで決まる．Fがk回$(0\leqq k\leqq n)$起こり，Bが$(n-k)$回起こったとき，Xは

$$k-(n-k)=2k-n$$

である．

ゆえにXのとりうる値は

$$\boldsymbol{2k-n}\quad(\boldsymbol{0\leqq k\leqq n})$$

である．

(2)　5回投げて点Pの位置が+3ということは，F が4回，B が1回起こったということであるから，求める確率は ◀ $2k-5=3$

$${}_5C_4\left(\frac{2}{3}\right)^4\left(\frac{1}{3}\right)^1=\boldsymbol{\frac{80}{243}}$$

(3)　F が k 回，B が $(n-k)$ 回起こるとき，Y の値は $\dfrac{2k-n+n}{2}=k$ である．したがって

$$P(Y=k)={}_nC_k\left(\frac{2}{3}\right)^k\left(\frac{1}{3}\right)^{n-k}$$

となる．これは Y が2項分布 $B\left(n,\ \dfrac{2}{3}\right)$ に従うことを意味している．

ゆえに，求める期待値は

$$E(Y)=\boldsymbol{\frac{2}{3}n}$$

また，分散は

$$V(Y)=n\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}=\boldsymbol{\frac{2}{9}n}$$

(4)　$X=2Y-n$　より

$$E(X)=2E(Y)-n=\frac{4}{3}n-n=\boldsymbol{\frac{1}{3}n}$$

$$\begin{aligned}V(X)&=V(2Y-n)\\&=4V(Y)\\&=\boldsymbol{\frac{8}{9}n}\end{aligned}$$

B.320 から B.324 まではA篇で述べるにとどめた定理の証明を行なう．理論的には重要なものばかりである．高校数学の学習としては解答を読んで理解出来れば十分であろう．

B. 320

確率変数とは，標本空間上の関数のことであった．

（☞ A3.2）

根元事象 e_1，e_2，…，e_n よりなる標本空間U上の確率変数 X の平均 $E(X)$ に対し，次がなりたつことを示せ．

(1)　$E(X)=\sum_{i=1}^{n} X(e_i)P(e_i)$

(2)　Uが互いに排反な事象 B_1，…，B_m の和となっており，しかも，各 $B_j(1\leqq j\leqq m)$ が起こると，確率変数 X は一定の値 $\tilde{x}_j$ を取るとき

$$E(X)=\sum_{j=1}^{m} \tilde{x}_j P(B_j)$$

解答　(1)　Xの取る値を x_1，x_2，…，x_L とする．そして，根元事象全体 e_1，e_2，…e_n を

$X(e)=x_1$ となる根元事象 e 全体

$e_{1,1}$，$e_{1,2}$，……，e_{1,N_1}

$X(e)=x_2$ となる根元事象 e 全体

$e_{2,1}$，$e_{2,2}$，……，e_{2,N_2}

⋮

$X(e)=x_L$ となる根元事象 e 全体

$e_{L,1}$，$e_{L,2}$，……，e_{L,N_L}

に区別すると

$$P(X=x_1)=P(e_{1,2})+\ \cdots\cdots\ +P(e_{1,N_1})$$
$$P(X=x_2)=P(e_{2,1})+\ \cdots\cdots\ +P(e_{2,N_2})$$
$$\vdots$$
$$P(X=x_L)=P(e_{L,1})+\ \cdots\cdots\ +P(e_{L,N_L})$$

である．これを確率変数の平均の定義

$$E(X)=\sum_{i=1}^{L} x_i P(X=x_i)$$

に代入すると

$$\begin{aligned}E(X)=&x_1\{P(e_{1,1})+\cdots\cdots+P(e_{1,N_1})\}\\&+x_2\{P(e_{2,1})+\cdots\cdots+P(e_{2,N_2})\}\\&\qquad\vdots\\&+x_L\{P(e_{L,1})+\cdots\cdots+P(e_{L,N_L})\}\\=&x_1P(e_{1,1})+\cdots\cdots+x_1P(e_{1,N_1})\\&+x_2P(e_{2,1})+\cdots\cdots+x_2P(e_{2,N_2})\\&\qquad\vdots\\&+x_LP(e_{L,1})+\cdots\cdots+x_LP(e_{L,N_L})\\=&X(e_{1,1})P(e_{1,1})+\cdots\cdots+X(e_{1,N_1})P(e_{1,N_1})\\&+X(e_{2,1})P(e_{2,1})+\cdots\cdots+X(e_{2,N_2})P(e_{2,N_2})\\&\qquad\vdots\\&+X(e_{L,1})P(e_{L,1})+\cdots\cdots+X(e_{L,N_L})P(e_{L,N_L})\\=&\sum_{i=1}^{n}X(e_i)P(e_i)\end{aligned}$$

となる．■

（2） 根元事象全体 e_1, ……, e_n を

B_1 に属する根元事象 $e_1{}^1$, ……, $e_1{}^{M_1}$

B_2 に属する根元事象 $e_1{}^1$, ……, $e_2{}^{M_2}$

⋮

B_m に属する根元事象 $e_m{}^1$, ……, $e_m{}^{M_m}$

に区分すると，(1)より

$$\begin{aligned}E(X)=&\tilde{x}_1P(e_1{}^1)+\cdots\cdots+\tilde{x}_1P(e_1{}^{M_1})\\&+\tilde{x}_2P(e_2{}^1)+\cdots\cdots+\tilde{x}_2P(e_2{}^{M_2})\\&\qquad\vdots\\&+\tilde{x}_mP(e_m{}^1)+\cdots\cdots+\tilde{x}_mP(e_m{}^{M_m})\\=&\tilde{x}_1(P(e_1{}^1)+\cdots\cdots+P(e_1{}^{M_1}))\\&+\tilde{x}_2(P(e_2{}^1)+\cdots\cdots+P(e_2{}^{M_2}))\\&\qquad\vdots\\&+\tilde{x}_m(P(e_m{}^1)+\cdots\cdots+P(e_m{}^{M_m}))\\=&\tilde{x}_1P(B_1)+\tilde{x}_2P(B_2)+\cdots\cdots+\tilde{x}_mP(B_m)\\=&\sum_{j=1}^{m}\tilde{x}_jP(B_j)\quad\blacksquare\end{aligned}$$

◀ $\tilde{x}_1$, $\tilde{x}_2$, … をくくり出した

［注］ 確率変数の平均 $E(X)$ とは(1)のように確率という重みつきの平均のことである（等確率ならば普通の平均である）．

(2)は(1)の一般化である．すなわち(2)において $B_1=\{e_1\}$, $B_2=\{e_2\}$, …, $B_n=\{e_n\}$ とおくと(1)の結果をうる．

(1)，(2)ともに意味を考えれば成立は明らかであろう．

B.321

X，Y を確率変数とする．

$$E(X+Y)=E(X)+E(Y)$$

を導け．

アプローチ A 3.6 で述べた定理の証明です．前問 B.320 の結果を用いるとわかりやすいでしょう．

解答 Xのとる値を x_1，……，x_m

Yのとる値を y_1，……，y_n

とし，事象「$X=x_i$ かつ $Y=y_j$」を B_{ij} $(1\leqq i\leqq m,\ 1\leqq j\leqq n)$ で表すことにする．事象 B_{ij} が起きたとき，確率変数 X，Y，$X+Y$ はそれぞれ，x_i，y_j，x_i+y_j という一定の値を取るので，前問(2)より

$$E(X+Y)=\sum_{i,j}(x_i+y_j)P(B_{ij})$$
$$=\sum_{i,j}x_iP(B_{ij})+\sum_{i,j}y_jP(B_{ij})$$
$$=E(X)+E(Y)$$

となる．■

これら B_{ij} は互いに排反で，和は全事象となる．

$\sum_{i,j}$ は $1\leqq i\leqq m$，$1\leqq j\leqq n$ をみたすすべての組 $(i,\ j)$ について足すことを意味する．

$$\sum_j x_iP(B_{ij})=x_i\cdot\sum_j P(B_{ij})=x_i\cdot P(X=x_i)$$

別解 X，Y は，根元事象 e_i，……，e_n よりなる標本空間上で定義された関数であるとすれば前問(1)より

$$E(X+Y)=\sum_{j=1}^{n}\{X(e_j)+Y(e_j)\}P(e_j)$$
$$=\sum_{j=1}^{n}X(e_j)P(e_j)+\sum_{j=1}^{n}Y(e_j)P(e_j)$$
$$=E(X)+E(Y)$$

となる．■

B. 322

X, Y を確率変数とする

XとYが独立ならば

$$E(XY)=E(X)E(Y)$$

がなりたつことを導け.

アプローチ A 3.6 で述べた定理の証明です. やはり, B.320 の結果を用いるとわかりやすいでしょう.

解答　Xのとる値を x_1, ……, x_m

Yのとる値を y_1, ……, y_n

とし,　事象「$X=x_i$」を A_i

事象「$Y=y_j$」を B_j

事象「$X=x_i$ かつ $Y=y_j$」を C_{ij}

で表すことにする ($1\leqq i\leqq m$, $1\leqq j\leqq n$).

◀ これら A_i は互いに排反で, 和は全事象となる. B_j, C_{ij} についても同様.

XとYが独立であるから

$$P(C_{ij})=P(A_i)P(B_j)$$

がなりたつ. これより, B.320 (2)の結果を用いると

$$E(XY)=\sum_{i,j}x_iy_jP(C_{ij})$$

◀ B.320 (2)

$$=\sum_{i,j}x_iy_jP(A_i)P(B_j)$$

◀ XとYは独立.

$$=\sum_i\left[\sum_j\{x_iP(A_i)\}\{y_jP(B_j)\}\right]$$

◀ 先に j について和をとる.

$$=\sum_i\left[\{x_iP(A_i)\}\sum_j\{y_jP(B_j)\}\right]$$

◀ $x_iP(A_i)$ は j によらないので $\sum_j$ の前に出した.

$$=\left[\sum_i\{x_iP(A_i)\}\right]\left[\sum_j\{y_jP(B_j)\}\right]$$

$$=E(X)E(Y)$$

◀ $\sum_j\{y_jP(B_j)\}$ は i によらないので $\sum_i$ の後にくくり出した.

となる. ■

B. 323

X と Y を確率変数とする．
X と Y が独立ならば，分散に関し

$$V(X+Y)=V(X)+V(Y)$$

がなりたつことを導け．

アプローチ A 3.7 において，$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$ を用いた証明を紹介しました．ここでは，この公式を経由しない方法で証明します．

解答　X のとる値を x_1，……，x_m

Y のとる値を y_1，……，y_n

とし，事象「$X=x_i$」を A_i，事象「$Y=y_j$」を B_j

事象「$X=x_i$ かつ $Y=y_j$」を C_{ij}

で表すことにする（前問と同様）．このとき

$V(X+Y)$

$=\sum_{i,j}(x_i+y_j-E(X+Y))^2P(C_{ij})$ ◀ $V(Y)$ は確率変数 $\{X-E(X)\}^2$ の平均であるとみなして B.320 の(2)を用いた．

$=\sum_{i,j}\{(x_i-E(X))+(y_j-E(Y))\}^2P(A_i)P(B_j)$ ◀ X と Y は独立

$=\sum_{i,j}(x_i-E(X))^2P(A_i)P(B_j)$

$\quad+2\sum_{i,j}(x_i-E(X))(y_j-E(Y))P(A_i)P(B_j)$ ◀ $\{\quad\}^2$ を展開

$\quad+\sum_{i,j}(y_j-E(Y))^2P(A_i)P(B_j)$

$=\left\{\sum_i(x_i-E(X))^2P(A_i)\right\}\left\{\sum_j P(B_j)\right\}$

$\quad+2\left\{\sum_i(x_i-E(X))P(A_i)\right\}\left\{\sum_j(y_i-E(Y))P(B_j)\right\}$

$\quad+\left\{\sum_i P(A_i)\right\}\left\{\sum_j(y_j-E(Y))^2P(B_j)\right\}$ ……　(＊)

ここで，$\sum_j P(B_j)=1$，$\sum_i(x_i-E(X))P(A_i)$

$=\sum_i x_iP(A_i)-E(X)\sum_i P(A_i)=E(X)-E(X)=0$

などより，

$$(＊)=\sum_i(x_i-E(X))^2P(A_i)+\sum_j(y_j-E(Y))^2P(B_j)$$

$$=V(X)+V(Y)$$

となる．■

B.324

確率変数Xの平均を m，標準偏差を σ とする．$\sigma \neq 0$ ならば，任意の正数 λ に対して

$$P(|X-m|<\lambda\sigma) \geqq 1-\frac{1}{\lambda^2}$$

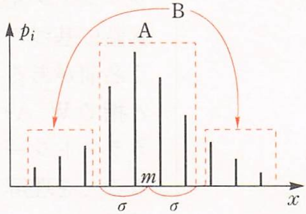
が成立すること(チェビシェフの定理)を示せ．

解答　確率変数Xのとる値を x_1，x_2，……x_n とし，$P(X=x_i)=p_i$ とする．いま，

$|x_i-m|<\lambda\sigma$ をみたす i 全体を　A

$|x_i-m| \geqq \lambda\sigma$ をみたす i 全体を　B

で表すことにする．



標準偏差の定義より

$$\sigma^2=\sum_{i=1}^{n}(x_i-m)^2p_i \geqq \sum_{i\in B}(x_i-m)^2p_i$$

◀ $\sum_{i=1}^{n}=\sum_{i\in A}+\sum_{i\in B}$ の $\sum_{i\in A}$ の部分を捨てているのである．($\sum_{i\in B}$ はBに属する i 全体にわたる和を表す)

また，集合Bの定義より

$$\sum_{i\in B}(x_i-m)^2p_i \geqq \sum_{i\in B}(\lambda\sigma)^2p_i=(\lambda\sigma)^2\sum_{i\in B}p_i$$

上2つの不等式より

$$\sigma^2 \geqq (\lambda\sigma)^2\sum_{i\in B}p_i \quad \therefore \quad \sum_{i\in B}p_i \leqq \frac{1}{\lambda^2}$$

よって

$$P(|X-m|<\lambda\sigma)=\sum_{i\in A}p_i$$

$$=1-\sum_{i\in B}p_i \geqq 1-\frac{1}{\lambda^2}$$

◀ $\lambda \leqq 1$ の場合は $1-\frac{1}{\lambda^2} \leqq 0$ だから内容のない(トリヴィアルな)不等式になってしまう．

研究　$l=\lambda\sigma$　とおくと定理は

$$P(|X-m|<l) \geqq 1-\frac{\sigma^2}{l^2}$$

と書きかえられる．これは σ が0に近いほどXが平均mに近い値をとる確率が大きい，という標準偏差のもつ意味を表している．どんな確率変数に対しても成立するという一般性の高い不等式であるが，欄外注でも述べたように少々荒っぽい．具体的な確率変数に対する応用よりも上で述べたように理論的応用に用いられる不等式である．別の応用(大数の法則の証明)は　☞B.514

Repos

奇跡の人

「奇跡の人」という映画を見たことがありますか？　光と音と声を生後間もなく失った少女ヘレン・ケラーが家庭教師サリヴァン先生の必死の努力でついに言語を獲得するという実話に基づいた映画です．水をかぶりながら，それに水という名前があることを初めて理解した少女と先生が，てのひらと指で W-A-T-E-R の 5 文字を何回も何回も＜叫ぶ＞というラストシーンが感動的でした．「ものには名前がある」ということを理解した瞬間です．三重苦を背負って言葉を知らず「獣のように」生きてきた少女がその見えない眼を輝かせ，「外界を理解する」ということの深い喜びを描いた名作でした．

日本語を知っている人が英語を学ぶことは比較的簡単ですが，言葉をまったく知らない人が言葉を修得することは，論理的に不可能なことではないでしょうか？　しかし私達は生まれて僅かな期間にこの不思議な学習に成功します．これは奇跡的というべきでしょう．目と耳と声の助けがあるということはこの奇跡が少し楽になるというに過ぎないように思われます．

私達は，ともすれば理解するということを平凡なことのように思いがちですが，新しい大きな理解にはつねにこのような奇跡的な飛躍があるということを忘れるべきではありません．私達はいつも苦労しながら，新しい W-A-T-E-R の叫びを求めて生きているのでしょうね．

ところで「奇跡の人」(原題は “miracle worker”)，見ていない人は是非見てください．



§4 算法とコンピュータ

数学Bの「算法とコンピュータ」では

ア) コンピュータの機能

イ) いろいろな算法のプログラム

を学ぶことになっているが，数学Aの「計算とコンピュータ」との区別は，明確でない．指導要領の解説表でさえプログラムの長さや複雑さに応じて，「数学A」,「数学B」に分類されるべきであるという，「基本方針」を述べるに留まっている．採用する言語すら特定できない，という状況下では，これ以上詳しく明確化することは誰にとってもできない相談だろう．

個々の数学用語の採否にまで口を出す，極めて統制色の強い我国の数学の指導要領の中にあって，コンピュータをめぐる文部省のこの対応は異例であるが，この結果として生ずる教科書・参考書の多様性は，高校現場でのコンピュータ忌避に，格好の口実を与えることに違いない．

しかし，高い目標を掲げて日々，研鑽している読者の中には，コンピュータに関しても検定教科書の枠を超えて勉強する意欲をもつ人が数多くいることを信じ，本書では以下，「大学への数学Aニューアプローチ」で扱わなかったグラフィクスを利用した数学の直観的理解(2次関数，三角関数)，反復計算による近似値の計算などを中心とするコンピュータ・プログラムの例を載せる．

「ユークリッドの互除法」や「素数」,「素因数分解」などの“整数もの”,「$1+2+3+\cdots+n=\dfrac{1}{2}n(n+1)$」などの数列ものについては，すでに「大学への数学Aニューアプローチ」で扱っているので，ここでは扱わない．

A4.1 BASIC の基本用語 (コマンド，ステートメント)

「数学A」では，我国のパソコン市場において，特にパーソナルユーザに対して圧倒的に高いシェアを有してきたNEC製のパソコンPC98シリーズ用の“日本語N88BASIC”に準拠してプログラムの解説を行なったが，DOS上のN88 DISK BASICは，標準装備ではなく，別途購入しなければならない製品であること，この古典的なBASICより遙かに高機能なQuick BASICが，英語版のDOSには標準添付されるようになっていること，などから，N88 DISK BASICに固執するのは，教育的にも，パソコン市場の論理からもナンセンスであること，さらに，ここ数年，日本IBMの開発したバイリンガル(二ヶ国語)DOS，日本語DOS/Vが急速に普及しつつあること，……を考えて，本書「大学への数学Bニューアプローチ」では，木田祐司先生(立教大学教授)が開発し，無料でその利用を開放している**U-BASIC** 86に沿って解説を行なうことにした．

このU-BASICは，他の多くの**フリーウェア**(無料で利用することを作者が認め，公開しているソフトウェア)と同様，極めて高性能なものであり，多倍長の整数計算(何桁の整数でも，近似値ではなく，メモリが許す限り正確な値で処理する)を始め，「本家」の有料ソフトにない優れた能力をそなえた高機能BASICインタープリタである．しかも，些細な違いを除いて，N88 DISK BASICとも文法は，同じである．本書の読者には，木田先生の御了承を得て，フロッピーディスクでU-BASIC(PC98版，DOS/V版，FMR版)を頒布する．(別紙参照)

初めに，「大学への数学Aニューアプローチ」でも触れた，BASICの基本術語を確認しておこう．

I．ファイル関係

load …… プログラムをメモリに読み込む．

[例] `LOAD "SUURETSU`

save …… メモリにあるプログラムをディスクに書き込む(保存)．

[例] `SAVE "GRAPH.UB"`

[例] `SAVE "GRAPH.UB","A"`

(後者では，ファイルがMS-DOSのアスキー形式で保存される．なお，N88 BASICでは

SAVE "GRAPH.BAS",A　とする．)

list …… メモリにあるプログラムを画面に表示する．

例　LIST -200

(行番号200までを表示する．)

例　LIST -100

(行番号100以下を表示する．)

edit …… メモリ上のプログラムを修正するために好都合のモード(全体が上下にスクロールするようになる)に入る．

例　EDIT

II．入出力関係

input …… プログラムの実行を中断して，キー・ボードからの入力を待ち，入力された内容を，指定した変数に格納する．

例　INPUT A

例　INPUT "a=";A　(N88BASICでは，INPUT "a=",A　とする．)

print …… 指定された文字列または変数の内容を画面に出力する．

例　PRINT "CONGRATULATION!"

例　PRINT "a=",A

＝ …… 左側に書かれた変数に右側の値(または変数の値)を代入する．

例　A=10

例　S=A

III. プログラム実行・制御関係

run…… メモリにあるプログラムを実行する.

goto…… 指定された行番号またはラベルにジャンプする.

例 GOTO 250

例 GOTO *JUMP

if～goto～else～…… 指定された条件が成立するか否かを判定する.

例 IF I=10 GOTO 200 ELSE 300

rem…… その行をコメント文(remark)として扱い,読み飛ばす.

例 REM COMPUTER AND MATHEMATICS

例 ' This is a comment.

for～next…… 指定された回数だけ,間にはさまれたプロセスを反復する.

例
```
FOR I= 1 TO 100
PRINT I
NEXT
```
◀ 1, 2, 3, …, 100 を表示するプログラム

IV. 算術命令

＋	……	加法	例 S=A+B
－	……	減法	例 D=A-B
＊	……	乗法	例 M=A*B
／	……	除法	例 V=A/B
∧	……	累乗	例 P=A^3

ⓗⓛⓒⓛ (ひとこと)

[特に注意すべきこと]

BASICでは,等号'＝'は,相等性だけでなく,「右辺を左辺に代入」の意味でも用いる.(後者の方が,頻度が高い!) 特に注意すべきは

S=S+10

のような用法である.これは,「変数Sの値に10を加えた数を,あらためて,変数Sに代入せよ」という命令である.(LET S=S+10 という表現もある.)

A4.2 プログラミングの基礎

例題　2次方程式の係数を入力して，解の種類(2つの実数解，重解，虚数解)を判定するプログラムを作れ．

```
10   ' ------  Example 1 ----------
20   '     2次方程式の解
30   ' ----------------------------
40   print '与えられた2次方程式（実数係数）の解を求めます。'
50   print '2次方程式の係数を入力してください。'
60   input 'Xの2乗の係数は';A
70   input 'Xの1乗の係数は';B
80   input '定数項は';C
90   'PRINT '考えるべき方程式は(';A;')x^2 +(';B;')x + (';C;') =0 です。'
100  D=B^2-4*A*C
110  ' 判別式Dの符号によって解を判別
120  if D>0 goto *JITSU:else if D=0 goto *JUUKAI:else goto *KYO
130  *JITSU
140  print 'その2次方程式は、実数解を持ちます。'
150  end
160  *KYO
170  print 'その2次方程式は、虚数解を持ちます。'
180  end
190  *JUUKAI
200  print 'その2次方程式は、重解を持ちます。'
210  end
```

＊JITSU や＊KYO はラベルと呼ばれる．行番号のかわりに利用される

ポイント

if [A] goto [B] :else goto [C]

Aが成り立てば，Bに飛べ

そうでなければ，Cに飛べ

if [A] goto [B] :else if [C] goto [D] :else goto [E]

Aが成り立てば ⟶ B

Aが成り立たないならば { Cが成り立てば ⟶ D / Cが成り立たないならば ⟶ E }

解説

1° 90行目　先頭の ' を削除して，この行を実行させると，方程式がスクリーンに表示される．

2° 130, 160, 190行目は，いわゆる**ラベル**．120行で goto 130 などと行番号で指示するよりプログラムを解読するのに便利である．

3° 150, 180行目　の end を忘れると，おかしな「判定」がなされる．

例題　2次方程式の係数を入力して，解の種類を判別し，解の値(近似値)を表示するプログラムを作れ．

```
10   ' ------  Example 2 ----------
20   '    ２次方程式の解
30   ' ----------------------------
40   print '与えられた２次方程式（実数係数）の解を求めます。'
50   print '２次方程式の係数を入力してください。'
60   input 'Xの２乗の係数は';A
70   input 'Xの１乗の係数は';B
80   input '定数項は';C
90   'PRINT '考えるべき方程式は(';A;')x^2 +(';B;')x + (';C;') =0 です。'
100  D=B^2-4*A*C
110  ' 判別式Dの符号によって解を判別
120  if D>0 goto *JITSU:else if D=0 goto *JUUKAI:else goto *KYO
130  *JITSU
140  print 'その２次方程式は、実数解を持ちます。'
142  X1=(-B-sqrt(D))/(2*A)
143  X2=(-B+sqrt(D))/(2*A)
146  print 'それらは、';X1;'と';X2;'です.'
150  end
160  *KYO
170  print 'その２次方程式は、虚数解を持ちます。'
172  REAL=-B/(2*A)
174  IMAGIN=sqrt(-D)/(2*A)
176  print 'それらは、';REAL;'+';IMAGIN;'i と';REAL;'-';IMAGIN;'i です.'
180  end
190  *JUUKAI
200  print 'その２次方程式は、重解を持ちます。'
202  X=-B/(2*A)
204  print '重解の値は';X;'です。'
210  end
```

← sqrt は正の平方根 (square root) を出す関数（142行目）

解説

1°　複雑なプログラムを作るには，簡単なものを，まずしっかり作り，それに機能を追加していくとよい．ここでは，前ページの Exampl 1 に機能を追加した Exampl 2 で行番が 10 の倍数でないものが追加された行である．(この後，行番号を，再び 10 おきに，きれいにつけなおす (renumber) には RENUM というコマンドを用いればよい.)

2°　176 行目の小細工は，虚数解をもつとき，$\alpha+\beta i$，$\alpha-\beta i$ と表示されるため．

例題　$y=ax^2$ の a の値を入力して，このグラフを描き，ついで，x 軸，y 軸方向に指定した量だけ平行移動した曲線を描け．

```
10   ' ----  Example 3 ---------------------------
20   '           グラフの平行移動（関数の定義）
30   ' ------------------------------------------
40   print '放物線y=a*x^2のグラフをかきます。'
50   input '係数aの値を入力してください。';A
60   XMIN=-6:XMAX=6
70   YMIN=-5:YMAX=5
80   cls 3
90   screen 0,15,0:screen 1:color:console 0,25,0
100  window (XMIN,YMIN)-(XMAX,YMAX)
110  line (XMIN,0)-(XMAX,0):line (0,-YMIN)-(0,-YMAX)   ← x軸，y軸表示
120  DOTS=2000                                          ← 曲線上の点の個数
130  XWIDTH=XMAX-XMIN                                   ← 隣りどうしの点の横の間隔
140  XPITCH=XWIDTH/DOTS
150  X=XMIN
160  for K=1 to DOTS
170  Y=fnF(A,X)
180  if Y>YMAX or Y<YMIN goto 200
190  pset (X,-Y)
200  X=X+XPITCH
210  next K
220  input 'x軸方向へどれだけ移動させますか、数値を入力してください。';P
230  input 'y軸方向へどれだけ移動させますか、数値を入力してください。';Q
240  print 'この移動で原点は、丸印をつけた点に移動します。'
250  circle (P,-Q),0.05,2
260  X=XMIN
270  for K=1 to DOTS
280  Y=fnF(A,X-P)+Q                      ← y=f(x) に対し y=f(x-p)+q
290  if Y>YMAX or Y<YMIN goto 310           を考えるのと同じ
300  pset (X,-Y)
310  X=X+XPITCH
320  next K
330  end
340  fnF(A,X)
350    local Y
360    Y=A*X^2
370  return(Y)
```

ポイント

関数の定義は，U-BASIC と N88 DISK BASIK では少し異なる．N88 DISK BASIC では，途中どこかに

```
DEF FNF(X)=X^2
```

と書くだけだが，U-BASIC では，上のように，プログラムの最後(endの後)に，きちんと定義する．

前ページのプログラムでは，グラフ表示の部分が 160〜210, 270〜320 と重複している．この部分をサブルーチン(部分処理)として抜き出すことにより，プログラムがより見やすいものになる．

```
10   ' ---- Example 4 --------------------------------
20   '         グラフの平行移動（サブルーチンの利用）
30   ' -----------------------------------------------
40   print '放物線y=a*x^2のグラフをかきます。'
50   input '係数aの値を入力してください。';A
60   XMIN=-7:XMAX=7
70   YMIN=-5:YMAX=5
80   cls 3
90   screen 0,15,0:screen 1:color:console 0,25,0
100  window (XMIN,YMIN)-(XMAX,YMAX)
110  line (XMIN,0)-(XMAX,0):line (0,-YMIN)-(0,-YMAX)
120  DOTS=2000
130  XWIDTH=XMAX-XMIN
140  XPITCH=XWIDTH/DOTS
150  P=0:Q=0
160  gosub *GRAPH                              ← サブルーチンを呼ぶ
170  input 'x軸方向へどれだけ移動させますか、数値を入力してください。';P
180  input 'y軸方向へどれだけ移動させますか、数値を入力してください。';Q
190  print 'この移動で原点は、丸印をつけた点に移動します。'
200  circle (P,-Q),0.05,2
210  gosub *GRAPH                              ← サブルーチンを呼ぶ
220  end
230  *GRAPH                         ┐
240  X=XMIN                         │
250  for K=1 to DOTS                │
260  Y=A*(X-P)^2+Q                  │
270  if Y>YMAX or Y<YMIN goto 290   ├ グラフ表示のサブルーチン
280  pset (X,-Y)                    │
290  X=X+XPITCH                     │
300  next K                         │
310  return                         ┘
```

注意　コンピュータのプログラムでは，文字入力の些細な違いも決定的である．たとえば，

,(comma) と .(period)

や

:(colon) と ;(semicolon)

のように見た目に大差ないものでも違っていると，正しく働かない．特にBASICで注意すべきは，

"(double quotes) と '(single quotes)

であるが，半角の活字の違いを印刷で表現することは極めて困難である．基本的には「文字列をくくって表すときは，double quotes，リマーク文を書くときは，single quotes」と理解していただきたい．

例題　nを正の整数とするとき，関数 $y=x^n$ $(x \geqq 0)$ が単調増大であることを利用して与えられた任意の数aと任意の自然数nに対し，aのn乗根($\sqrt[n]{a}$)の値(近似値)を求めるプログラムを作れ.

```
 10  ' ----  Example 5 ------------------------------------
 20  '         平方根の近似値の計算
 30  '         (二分法による方程式の数値解法)
 40  ' ---------------------------------------------------
 50  print '与えられた正の数aのn乗根の近似値を求めます。'
 60  input 'aはいくらですか？　数を入力してください。';A
 70  input '何乗根を求めますか？　nの値を入力して下さい。';N
 80  EPSILON=0.00001
 90  X1=0:X2=1
100  if X2^N>A goto *MAIN
110  X1=X2:X2=X2*2
120  goto 100
130  *MAIN
140  DIFF=X2-X1
150  while DIFF>EPSILON
160  MID=(X1+X2)/2
170  B=MID^N
180  if MID^N<A goto 210
190  X2=MID
200  goto 220
210  X1=MID
220  DIFF=X2-X1
230  wend
240  print '近似値は';X1;'です。'
```

(80〜110行) $x_1<\sqrt{a}<x_2$ となる x_1，x_2 を見つけるという準備作業

(140〜210行) この部分が WHILE……WEND ループである

ポイント

while〜wend 文では，for〜next 文と違い，反復の回数を指定しなくても，ある条件が満たされている限り，何回でも繰り返す．反復の回数があらかじめわかっていないときに便利な命令である．

解説

1°　80〜110行は，$(0=x_2<)\sqrt[n]{a}<x_2$ となる x_2 を見つけるための処理．(最初に X2=1 としているので，aの値によっては，$\sqrt[n]{a}<$X2 とならない．1，2，4，8，16，32，…… としていって，始めて $\sqrt[n]{a}$ を超えたところで，それをX2とする．)

2°　$X1<\sqrt[n]{a}<X2$ のとき，$MID=\dfrac{X1+X2}{2}$ とすると

i）$\sqrt[n]{a}<MID$ または　ii）$MID<\sqrt[n]{a}$　（または iii）$\sqrt[n]{a}=MID$）

i）のときは，MID を新しい X2
ii）のときは，MID を新しい X1

として，X1 と X2 の隔りが十分小さくなる（ここでは 0.00001 よりも小さくなる）まで続ける．

少し，プログラムを詳しくすると，どのような処理が進んでいるかがわかるようにできる．

```
10   ' ------ Example 6 ----------------------------------
20   '     二分法による方程式の数値解法      （累乗根の計算）
30   ' ------------------------------------------------
40   print '与えられた正の数aのn乗根の近似値を求めます。'
50   input 'aはいくらですか？　数を入力してください。';A
60   input '何乗根を求めますか？　正の整数nの値を入力して下さい。';N
70   EPSILON=0.00000001
80   X1=0:X2=1
90   if X2^N>A goto *MAIN
100  X1=X2:X2=X2*2
110  goto 90
120  *MAIN:'近似値を計算するためのメインルーチン
130  DIFF=X2-X1
140  while DIFF>EPSILON
150  MID=(X1+X2)/2
160  print '近似値として';MID;'を求めました。'
170  if MID^N<A goto 210
180  print 'しかし多分大き過ぎます。'
190  X2=MID
200  goto 230
210  print 'しかし小さ過ぎます。'
220  X1=MID
230  DIFF=X2-X1
240  wend
250  print '近似値として';X1;'が求まりました。'
260  'PRINT '検算します。いま求めた数の';N;'乗は'
270  'RUIJOU=1
280  'for I=1 to N
290  'RUIJOU=RUIJOU*X1
300  'next I
310  'print RUIJOU;'です。'
```

解説

1°　260～310 行の冒頭の ' を省くと，検算を行なう．

2°　180 行目に「多分」と入っているのは，求めるべき値そのものである可能性も否定できないためである．

例題　$y=ax\sin(bx)$ のグラフを b も a の値をいろいろに変えてかくプログラムを書け．

```
10  ' ---- Example 7  ---------------------------------
20  '      三角関数 sin(x) のグラフ
30  ' ---------------------------------------------------
40  cls 3
50  DOTS=3000
60  ANGLEWIDTH=3.14159*2
70  PITCH=ANGLEWIDTH/DOTS
80  screen 0,15,0:screen 1:color:console 0,25,0
90  window (-1.5,-3.0)-(8,2.4)
100 line (-2,0)-(10,0):line (0,3)-(0,-3)
110 THETA=0
120 for K=1 to DOTS
130 X=cos(THETA):Y=sin(THETA)
140 'circle (X,-Y),0.01,4
150 line (X,-Y)-(X,0),2
160 'pset (THETA+1,-Y)
170 line (THETA+1,-Y)-(THETA+1,0),3
180 'circle (X,-Y),0.01,0
190 line (THETA+1,-Y)-(THETA+1,0)
200 THETA=THETA+PITCH
210 next K
```

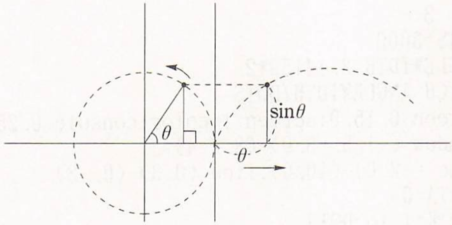
解説

1°　関数 $y=a\sin bx$ において，x は本来，単なる数でなくてはならない．これが弧度法であるが，「指導要領」に従うと，数学Ⅱでは，度数法(1回転を π とする角の計り方)しか学ばないことになっている．BASIC は，「指導要領」にとらわれないから，単に

sin(X)

と書けば，当然，弧度法(1回転を 2π とする角の計り方．☞「大学への数学IIニューアプローチ」)で計算する．

例題　**演習.** $y=\sin\theta$ において，θ と y の関係は，下図のように図示される．この関係を一般化することにより，θ の変化に対して，$\sin\theta$ がどのように変化していくかを表すコンピュータ・グラフィクスを工夫せよ．




```
10  ' ----  Example 8  ----------------------------
20  '       三角関数 y=a*sin(b*x) のグラフ
30  ' ---------------------------------------------
40  print ' Y=A*sin(B*x) のグラフをかきます。'
50  DOTS=5000:XMIN=-6:XMAX=6:YMIN=-4:YMAX=4
60  XWIDTH=XMAX-XMIN:PITCH=XWIDTH/DOTS
70  screen 0,15,0:screen 1:color:console 0,25,0
80  window (XMIN,YMIN)-(XMAX,YMAX)
90  for B=1 to 3
100   for A=-3 to 3
110     X=XMIN
120     print 'いまは、A=';A;'B=';B;'としています。'
130     print '周期は、';360/B;'度、すなわち3.14...の';1/B;'倍です。'
140     print '振幅は';abs(A);'です。'
150     line (XMIN,0)-(XMAX,0),15
160     line (0,YMIN)-(0,YMAX),15
170     for K=1 to DOTS
180        Y=fnF(X):pset (X,-Y),7
190        X=X+PITCH
200     next K
210     X=XMIN
220     for K=1 to DOTS
230        Y=fnF(X):pset (X,-Y),1
240        X=X+PITCH
250     next K
260    cls 2
270   next A
280   cls 3
290 next B
300 end
310 fnF(X)
320    C=A*sin(B*X)
330 return(C)
```

（行210〜250）別の色でなぞる

例題　与えられた2つの複素数とその和を複素数平面上に表示するプログラムを作れ.

```
10   ' ------ Exmaple 9 -----
20   '    複素数の演算（加法）
30   ' ----------------------
40   cls 3
50   screen 3
60   XMIN=-10:XMAX=10
70   YMIN=-7:YMAX=7
80   window (XMIN,YMIN)-(XMAX,YMAX)
90   line (XMIN,0)-(XMAX,0):line (0,YMIN)-(0,YMAX)
100  print '一番目の複素数を入力してください。'
110  input '実部は';A
120  input '虚部は';B
130  circle (A,-B),0.04
140  line (0,0)-(A,-B)
150  print '二番目の複素数を入力してください。'
160  input '実部は';C
170  input '虚部は';D
180  circle (C,-D),0.04
190  line (0,0)-(C,-D)
200  E=A+C
210  F=B+D
220  print '和は';E;'+';F;'i です。'
230  circle (E,-F),0.04
240  line (0,0)-(E,-F)
```

解説

1°　130, 180, 230 行は pset 文でも良いが, 点1個だけでは小さすぎて見にくいので, 小さな半径の円板で点を代用している.

2°　140, 190, 240 行目は, 複素数をベクトルとしてとられることの利点を強調するために, 点を線分で結んでいる.

例題　与えられた2つの複素数と，それらの積を複素数平面に表示するプログラムを作れ．

```
10   ' ----- Exmaple 10 -----
20   '    複素数の演算（乗法）
30   ' ----------------------
40   cls 3
50   screen 3
60   XMIN=-10:XMAX=10
70   YMIN=-7:YMAX=7
80   window (XMIN,YMIN)-(XMAX,YMAX)
90   line (XMIN,0)-(XMAX,0):line (0,YMIN)-(0,YMAX)
100  print "一番目の複素数を入力してください。"
110  input "実部は";A
120  input "虚部は";B
130  circle (A,-B),0.04
140  line (0,0)-(A,-B)
150  print "二番目の複素数を入力してください。"
160  input "実部は";C
170  input "虚部は";D
180  circle (C,-D),0.04
190  line (0,0)-(C,-D)
200  E=A*C-B*D
210  F=B*C+A*D
220  print "和は";E;"+";F;"i です。"
230  circle (E,-F),0.04
240  line (0,0)-(E,-F)
```

解説

1°　前ページのプログラムと違うのは，200，210 行目だけである．つまり前ページの

$$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$$

に対し，

$$(a+bi)\times(c+di)=(ac-bd)+(ad-bc)i$$

を計算している．

割り算にするには，ここを

```
200 E=(A*C+B*D)/(C*C+D*D)
210 F=(-A*D+B*C)/(C*C+D*D)
```

と変更すればよい．

例題　与えられた複素数 $\alpha=a+bi$, $\beta=c+di$ に対して，複素数 $z=x+iy$ の表す点$(x,\ y)$と関数 $\omega=\alpha z+\beta$ で定まる複素数 $\omega=u+iv$ の表す点$(u,\ v)$の関係をグラフで考えたい。

z が $-10-7i$, $10+7i$ を向かいあう頂点にもつ長方形の周を描く場合を表示するプログラムを作れ。

```
10   ' ----- Exmaple 11 ----
20   '    複素平面上の変換
30   ' ----------------------
40   cls 3
50   screen 3
60   XMIN=-10:XMAX=10
70   YMIN=-7:YMAX=7
80   window (XMIN,YMIN)-(XMAX,YMAX)
90   DOTS=1000
100  PITCH=2/DOTS
110  'LINE(XMIN,0)-(XMAX,0):LINE(0,YMIN)-(0,YMAX)
120  print 'w=alpha*z+betaのグラフをかきます。'
130  print '複素数alphaの'
140  input '実部は';A
150  input '虚部は';B
160  print '複素数betaの'
170  input '実部は';C
180  input '虚部は';D
190  for K=1 to DOTS
200  gosub *GRAPH
210  X=X+PITCH
220  next K
230  for L=1 to DOTS
240  gosub *GRAPH
250  Y=Y+PITCH
260  next L
270  for M=1 to DOTS
280  gosub *GRAPH
290  X=X-PITCH
300  next M
310  for N=1 to DOTS
320  gosub *GRAPH
330  Y=Y-PITCH
340  next N
350  end
360  *GRAPH
370     U=A*X-B*Y+C
380     V=B*X+A*Y+D
390     pset (X,-Y),1
400     pset (U,-V),2
410  return
```

（行370～410）与えられた $X+iY$ に対し，点$(X,\ Y)$を $U+iV=(\alpha+i\beta)(X+iY)$ で定まる点$(U,\ V)$を表示する。

例題　前問で，点 z が，原点を中心とする，半径＝1，2，3 の円を描くとき，点 $w=\alpha z+\beta$ の描く図形がわかるプログラムを作れ．

```
10   ' ----- Exmaple 12 ----
20   '    複素平面上の変換
30   ' ---------------------
40   cls 3
50   screen 3
60   XMIN=-11:XMAX=11
70   YMIN=-8:YMAX=6
80   window (XMIN,YMIN)-(XMAX,YMAX)
90   DOTS=1000
100  THETA=0:PITCH=2*3.14159/DOTS
110  'LINE(XMIN,0)-(XMAX,0):LINE(0,YMIN)-(0,YMAX)
120  print "w=alpha*z+betaのグラフをかきます。"
130  print "複素数alphaの"
140  input "実部は";A
150  input "虚部は";B
160  print "複素数betaの"
170  input "実部は";C
180  input "虚部は";D
202  for R=1 to 3
210  for K=1 to DOTS
222  THETA=THETA+PITCH
223  X=R*cos(THETA):Y=R*sin(THETA)
225  gosub *GRAPH
240  next K
245  next R
250  end
330  *GRAPH
340  U=A*X-B*Y+C
350  V=B*X+A*Y+D
360  pset (X,-Y),1
370  pset (U,-V),2
380  return
```

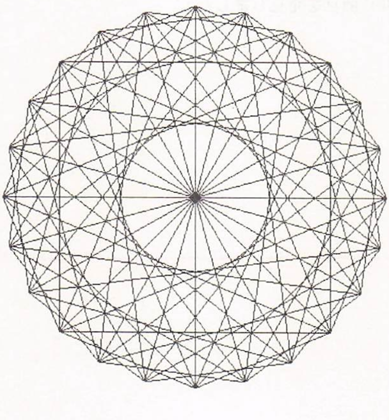
最後に，数学的にはさして重要でないが，コンピュータの良さのよく出るプログラムの例を2つあげよう．

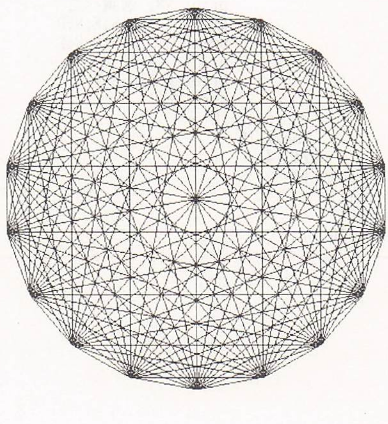
```
10  ' ---- Example 13 -----------------------------------
20  '        コンピュータ・グラフィクスの楽しみ
30  ' ---------------------------------------------------
40  screen 0,15,0:screen 1:color:console 0,25,0
50  cls 3
60  Pi=3.141592
70  X0=300:Y0=200
80  print '正多角形を対角線とともに描きます。'
90  input '何角形を描きますか？　正の整数を入力してください。';N
100 R=180
110 input '頂点をいくつごとに対角線を引きますか？';S
120 for J=0 to N
130    Theta=2*Pi*(J/N)
140    X1=X0+R*cos(Theta):Y1=Y0+R*sin(Theta)
150    pset (X1,Y1)
160    for I=J+S to N^2 step S
170       Phi=2*Pi*(I/N)
180       X=X0+R*cos(Phi):Y=Y0+R*sin(Phi)
190       line (X,Y)-(X1,Y1)
200    next I
210 next J
```

解説

〈美〉には，さまざまな形態と様式がある．目で見える図形的な美のうちで，最も単純で，それゆえにときとして最も鮮烈なものは，対称性に由来するそれであろう．

それにしても，正多角形の頂点をいくつかおきに結ぶ対角線をひく，という単純な作業の反復が作り出す図形に，〈深遠な美〉を感ずるのは，我々の意識の謎である．





コンピュータでパズルを解くこともできる。

```
10   '   数当てクイズ
20   '         SEND
30   '     +) MORE
40   '   ---------------
50   '       MONEY
60   ' -----------------------------------------------------------------
70   cls
80   print '        SEND'
90   print '    +) MORE'
100  print '  ---------------'
110  print '      MONEY'
120  print '  となるような異なる数の組みをシラミ潰しに探します！'
130  print '  少し時間がかかります。うーーん';
140  for I0=1 to 9
150  for I1=0 to 9
160    if I1=I0 goto 550
170    for I2=0 to 9
180       if I2=I0 or I2=I1 goto 540
190       for I3=0 to 9
200          if I3=I0 or I3=I1 or I3=I2 goto 530
210          for I4=0 to 9
220            if I4=I0 or I4=I1 or I4=I2 or I4=I3 goto 520
230            for I5=0 to 9
240              if I5=I0 or I5=I1 or I5=I2 or I5=I3 or I5=I4 goto 510
250              for I6=0 to 9
260                if I6=I0 or I6=I1 or I6=I2 or I6=I3 or I6=I4 or I6=I5 goto 500
270                for I7=0 to 9
280                  if I7=I0 or I7=I1 or I7=I2 or I7=I3 or I7=I4 or I7=I5 or I7=I6 goto 490
290  ' ============================================================
300  ' ------     値の設定     ----------------------------------------
310  'LOCATE 20,8:PRINT'いま';NN;'番目の組み合せを調べています。'
320  M=I0:D=I1:E=I2:Y=I3:N=I4:O=I5:R=I6:S=I7
330        NN=NN+1
340  ' ------     判定        ----------------------------------------
350  'ズル              IF Y<>D+E AND Y<>D+E-10 GOTO 710
360                     AAA=S*1000+E*100+N*10+D
370                     BBB=M*1000+O*100+R*10+E
380                     CCC=M*10000+O*1000+N*100+E*10+Y
390                     if CCC=AAA+BBB goto *REPORT:else goto 490
400  ' ------     結果報告     ----------------------------------------
410  *REPORT
420                     BANME=BANME+1
430                     print
440                     print NN;'個調べてやっと';BANME;'個目を発見しました！'
450                     print '  ';S;E;N;D
460                     print '+) ';M;O;R;E
470                     print '---------------'
480                     print M;O;N;E;Y
490                    next I7
500                next I6
510             next I5
520          next I4
530       next I3
540    next I2
550  next I1
560  next I0
```

§5　発展問題

本セクションでは，内容が数学Ｂのいくつかの単元にまたがる問題，あるいは，各単元の深い理解と粘り強い思考が要求される問題を扱う．独力で解決できなくとも，解答を熟読してしっかり理解できれば，著者達の意図は達成される．難解であれば，初読の際は読みとばす手もあろう．



B. 501

平面内に三角形 ABC がある．実数 t が $0 \leqq t \leqq 1$ の範囲を動くとき

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}+2t\overrightarrow{\mathrm{BP}}+(1-t)\overrightarrow{\mathrm{CP}}=\vec{0} \quad \cdots\cdots\cdots \quad (*)$$

をみたす点Pの軌跡を求めよ．

解答　$(*)$をAに基準とするベクトルで書き直すと，

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}+2t(\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}})+(1-t)(\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}})=\vec{0}$$

$$\therefore \quad (2+t)\overrightarrow{\mathrm{AP}}=2t\,\overrightarrow{\mathrm{AB}}+(1-t)\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

$$\therefore \quad \overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{2t}{2+t}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{1-t}{2+t}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

となる．ここで

$$\frac{2t}{2+t}\cdot\frac{1}{\alpha}+\frac{1-t}{2+t}\cdot\frac{1}{\beta}=1 \quad \cdots\cdots\cdots \quad (**)$$

となる実数 α，β がみつかれば

Pの軌跡は直線の一部である，と推測したのである．

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\left(\frac{2t}{2+t}\cdot\frac{1}{\alpha}\right)\alpha\,\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\left(\frac{1-t}{2+t}\cdot\frac{1}{\beta}\right)\beta\,\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

となり，Pは

$$\overrightarrow{\mathrm{AB'}}=\alpha\,\overrightarrow{\mathrm{AB}},\quad \overrightarrow{\mathrm{AC'}}=\beta\,\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

をみたす B′，C′ を通る直線上の点であることがわかる．

$(**)$をみたす α，β は $\alpha=\frac{2}{3}$，$\beta=\frac{1}{2}$

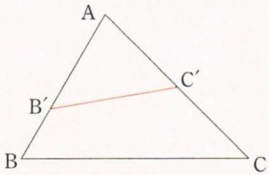
である．よって

t を時刻と思うと，Pの動く速さは一定でない．

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\left(\frac{3t}{2+t}\right)\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\left(\frac{2-2t}{2+t}\right)\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

となる．$0 \leqq t \leqq 1$ のとき　$0 \leqq \frac{3t}{2+t} \leqq 1$

であるから，結局Pの軌跡は



$\overrightarrow{\mathrm{AB'}}=\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，　$\overrightarrow{\mathrm{AC'}}=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

で決まる線分 B′C′

となる．

B.502

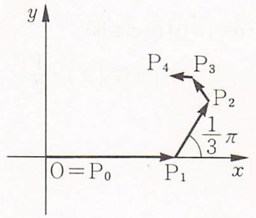
xy 平面において，$P_0(0,\ 0)$，$P_1(1,\ 0)$，P_2，P_3，……は次の条件をみたす点列とする．

[i] $|\overrightarrow{P_iP_{i+1}}|=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{P_{i-1}P_i}|$，[ii] $\angle P_{i-1}P_iP_{i+1}=\dfrac{2}{3}\pi(=120^\circ)$

[iii] 点 P_{i+1} は点 P_{i-1} から点 P_i に向う方向に対して左側にある．　$(i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

このとき，点 P_{6n} $(n\geqq 0)$ の座標を求めよ．

解答　$\vec{u_i}=\overrightarrow{P_{i-1}P_i}$ $(i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ とおく．



$|\vec{u_1}|=|\overrightarrow{P_0P_1}|=1$ と [i] より $|\vec{u_i}|=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{i-1}$ ………①

また，[ii]，[iii] より，$\vec{u_i}$ と x 軸の正の向きとのなす角は，$\dfrac{\pi}{3}$ ずつ増えるので，$\dfrac{i-1}{3}\pi$ であり，$\vec{u}_{i+6}$ と $\vec{u_i}$ は同じ向きである．

◀これを見抜くことが大事．

$$\vec{u_i}=\left(\frac{1}{2}\right)^{i-1}\left(\cos\frac{i-1}{3}\pi,\ \sin\frac{i-1}{3}\pi\right)\quad\cdots\cdots②$$

$$\therefore\quad \vec{u}_{i+6}=\left(\frac{1}{2}\right)^6\vec{u_i}=\frac{1}{64}\vec{u_i}\quad\cdots\cdots③$$

②より，

$$\overrightarrow{P_0P_6}=\sum_{i=1}^{6}\overrightarrow{P_{i-1}P_i}=\sum_{i=1}^{6}\vec{u_i}=\left(\frac{63}{64},\ \frac{21\sqrt{3}}{64}\right)$$

◀$\vec{u_1}=(1,\ 0)$

$\vec{u_2}=\dfrac{1}{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{3},\ \sin\dfrac{\pi}{3}\right)=\left(\dfrac{1}{4},\ \dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)$

……を計算する．

同様に，③を利用して

$$\overrightarrow{P_6P_{12}}=\sum_{i=7}^{12}\overrightarrow{P_{i-1}P_i}=\sum_{i=7}^{12}\vec{u_i}=\sum_{i=1}^{6}\vec{u}_{i+6}$$
$$=\sum_{i=1}^{6}\frac{1}{64}\vec{u_i}=\frac{1}{64}\overrightarrow{P_0P_6}$$

これを繰り返して $\overrightarrow{P_{6(k-1)}P_{6k}}=\left(\dfrac{1}{64}\right)^{k-1}\overrightarrow{P_0P_6}$

を得るから

$$\overrightarrow{OP_{6n}}=\sum_{k=1}^{n}\overrightarrow{P_{6(k-1)}P_{6k}}=\left(\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{64}\right)^{k-1}\right)\overrightarrow{P_0P_6}$$
$$=\frac{64}{63}\left\{1-\left(\frac{1}{64}\right)^n\right\}\overrightarrow{P_0P_6}$$

$$\therefore\quad \mathbf{P_{6n}}\left(\mathbf{1-\left(\frac{1}{64}\right)^n,\ \frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{1}{64}\right)^n}\right)$$

◀B.507 [注] 参照

B.503

1辺の長さ $2\sqrt{2}$ の正四面体 ABCD の辺 AB, CD の中点を M, N とする．この四面体を MN のまわりに回転してできる立体の体積を求めよ．

アプローチ 適当な座標系をとって考えた方が楽です．そのためには，正四面体に関する基本的性質を知っておく必要があります．

解答　$\overrightarrow{DA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{DB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{DC}=\vec{c}$ とおくとき，1辺の長さ $2\sqrt{2}$ の正四面体である条件は

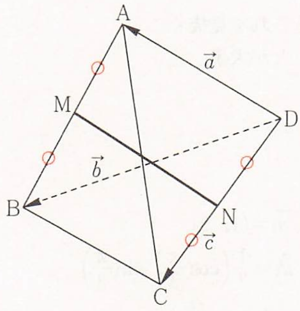
$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos 60^\circ$
$=(2\sqrt{2})^2\cdot\frac{1}{2}$

$$\begin{cases}|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=2\sqrt{2}\\ \vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=4\end{cases}\quad\cdots\cdots\ ①$$

である．

$$\overrightarrow{AB}=\vec{b}-\vec{a},\ \overrightarrow{DC}=\vec{c}$$

$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{DN}-\overrightarrow{DM}=\frac{1}{2}(\vec{c}-\vec{a}-\vec{b})$$



であるから，①より

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{MN}=(\vec{b}-\vec{a})\cdot\frac{1}{2}(\vec{c}-\vec{a}-\vec{b})$$

$$=\frac{1}{2}\{\vec{b}\cdot\vec{c}-\vec{c}\cdot\vec{a}+|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2\}$$

$$=0$$

同様に

$$\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=0$$

が示されるから，

AB, CD, MN は互いに垂直である．……(☆)

次に，やはり①より

$$|\overrightarrow{MN}|^2=\frac{1}{4}|\vec{c}-\vec{a}-\vec{b}|^2$$

$$=\frac{1}{4}\{|\vec{c}|^2+|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}-2\vec{b}\cdot\vec{c}-2\vec{c}\cdot\vec{a}\}$$

$$=4$$

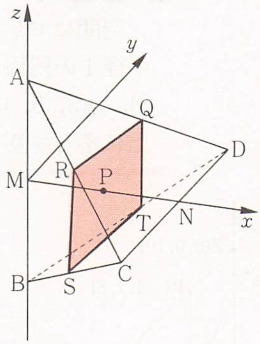
正四面体の性質
$MN=\frac{1}{\sqrt{2}}AB$

$$\therefore\ MN=2\quad\cdots\cdots\ ②$$

を得る．

(☆)と②から，Mを原点，A$(0,\ 0,\ \sqrt{2})$ B$(0,\ 0,\ -\sqrt{2})$, N$(2,\ 0,\ 0)$, C$(2,\ -\sqrt{2},\ 0)$ D$(2,\ \sqrt{2},\ 0)$ となる座標系がとれる．

このとき,



$$\mathrm{AD}:\frac{x}{\sqrt{2}}=y=\frac{z-\sqrt{2}}{-1},$$

$$\mathrm{AC}:\frac{x}{\sqrt{2}}=\frac{y}{-1}=\frac{z-\sqrt{2}}{-1},$$

$$\mathrm{BC}:\frac{x}{\sqrt{2}}=\frac{y}{-1}=z+\sqrt{2},$$

$$\mathrm{BD}:\frac{x}{\sqrt{2}}=y=z+\sqrt{2}$$

であり，これらと，$\mathrm{P}(t,\ 0,\ 0)$ ($0\leqq t\leqq 2$ …③) を通り，x 軸に垂直な平面 $\alpha:x=t$ との交点は順に

$$\mathrm{Q}\left(t,\ \frac{t}{\sqrt{2}},\ \sqrt{2}-\frac{t}{\sqrt{2}}\right),$$

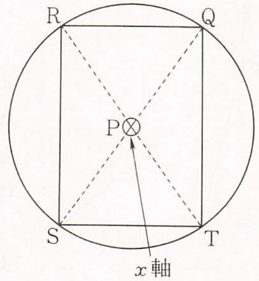
$$\mathrm{R}\left(t,\ -\frac{t}{\sqrt{2}},\ \sqrt{2}-\frac{t}{\sqrt{2}}\right),$$

$$\mathrm{S}\left(t,\ -\frac{t}{\sqrt{2}},\ \frac{t}{\sqrt{2}}-\sqrt{2}\right),$$

$$\mathrm{T}\left(t,\ \frac{t}{\sqrt{2}},\ \frac{t}{\sqrt{2}}-\sqrt{2}\right)$$

であるから，正四面体の平面 α による切り口はPを中心とする長方形QRSTである.

◀ α による断面図



したがって，回転体の平面 α による切り口は，Pを中心とし，半径PQの円であり，その断面積 $\mathrm{S}(t)$ は

$$S(t)=\pi\cdot\mathrm{PQ}^2$$

$$=\pi\left\{\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\sqrt{2}-\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2\right\}$$

$$=\pi(t^2-2t+2)$$

で与えられる.

これより，求める体積を V とすると，③より

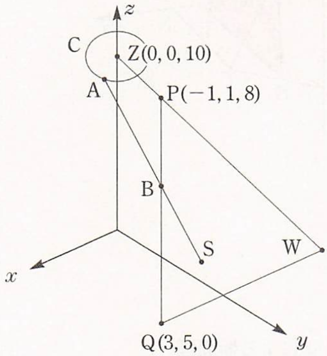
$$V=\int_0^2 S(t)\,dt=\pi\left[\frac{1}{3}t^3-t^2+2t\right]_0^2$$

$$=\frac{8}{3}\pi$$

[注]　正四面体ABCDにおいて，(☆)および $\mathrm{MN}=\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{AB}$ が成り立つことは覚えておいてよい事実である．ここでは，ベクトルを利用して示したが，初等幾何的にも簡単に証明できる.

B.504

空間において，平面 $z=10$ の上にある中心 $Z(0,\ 0,\ 10)$，半径1の円周Cの上を光源が回っている．2点 $P(-1,\ 1,\ 8)$，$Q(3,\ 5,\ 0)$ を結ぶ線分が xy 平面に張られたスクリーン上に落とす影全体を xy 平面に図示し，その面積を求めよ．

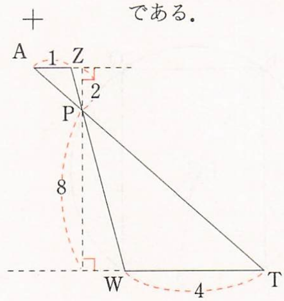


アプローチ 円周上の動点と線分上の動点を結ぶ直線と xy 平面との交点の軌跡を求めます．この直線の方程式をたてて交点のパラメタ表示を行うことはもちろん出来ますが，肝腎の部分はその先にあります．

解答 円周C上の点A，線分PQ上の点をBとおく．求める図形は，A，B双方が動いたとき直線ABと xy 平面との交点が描く軌跡である．

まず，BをPに固定し，AをC上動かしたときの直線APと xy 平面との交点Tの軌跡をまず求める．直線ZPと xy 平面との交点をWとおくと平面AZP上に△AZP，△TWPが載っていて

▶ $W(-5,\ 5,\ 0)$ である．



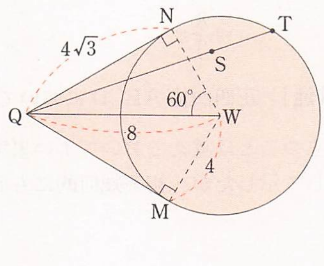
$$\begin{cases} \triangle AZP \backsim \triangle TWP \\ ZP : PW = 1 : 4 \end{cases}$$

より $WT=4$ がわかるので，Tは xy 平面上，中心W，半径4の円周C′上を動くことがわかる．ここで，C′とCの役割を逆にして考えれば，TがC′全体を動くことがわかる．

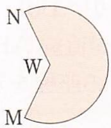
次に，C上Aを固定し，Bを線分PQ上PからQまで動かしたとき直線ABと xy 平面との交点Sは，直線APと xy 平面との交点TとQを結んだ線分全体を動く．

▶ 平面APQと xy 平面との交線の一部である

以上より，A，B双方を動かした時，Sは次の図の着色部分を動く．



その面積は，QW＝8 に注意して

$\triangle$QNW＋$\triangle$QMW＋ 

$$=\left(\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 4\sqrt{3}\right)\times 2+\frac{2}{3}\cdot 4^2\cdot \pi$$

$$=\mathbf{16\sqrt{3}+\frac{32}{3}\pi}$$

解説　点Aを$(\cos\theta,\ \sin\theta,\ 10)$　Bを$(-1+4t,\ 1+4t,\ 8-8t)$ $(0\leqq t\leqq 1)$　とパラメタ表示すれば，直線ABは

$$\frac{x-\cos\theta}{\cos\theta+1-4t}=\frac{y-\sin\theta}{\sin\theta-1-4t}=\frac{z-10}{10-8+8t}$$

となるので，xy 平面との交点の座標を求めるには $z=0$ とおくと

$$x=\frac{4t-4}{4t+1}\cos\theta+\frac{5(4t-1)}{4t+1}$$

$$y=\frac{4t-4}{4t+1}\sin\theta+\frac{5(4t+1)}{4t+1}$$

となる．$s=\dfrac{4t-4}{4t+1}$　$(-4\leqq s\leqq 0)$　とおくと

$$x=s\cos\theta+(2s+3)$$

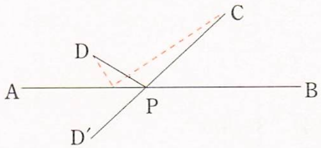
$$y=s\sin\theta+5$$

と整理すれば，ここから領域を求めるのは困難でないが，表示式から図形を読みとるという作業がここからは避けられない．図形問題において方程式による図形表示はあくまで有用な道具の１つにすぎないことを心に留めおくべきだろう．

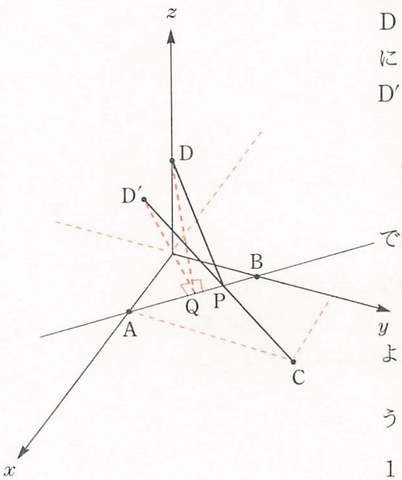
B.505

空間内の 4 点 A(1, 0, 0), B(0, 1, 0), C(1, 2, 0), D(0, 0, 1) に対し，点Pが直線 AB 上を動くとき CP+PD が最小となるPの座標を求めよ．

アプローチ 平面の場合，CとDが直線 AB に関して互いに反対側にあれば，直線 CD と直線 AB の交点Pが CP+PD を最小する直線 AB 上の点です．CとDが直線 AB に関して互いに同じ側にあれば，AB に関してDと対称な点 D′ を考えれば，PD=PD′ ですから，CP+PD′ を最小にすることを考えればよく，前の場合に帰着します．



解答 直線を軸とする空間の回転の下で 2 点間の距離は変わらない．よって直線 AB を軸にした回転でDを xy 平面上の点 D′ に移し，CP+PD の代わりに CP+PD′ を考えればよい．



D′は

$$\begin{cases} \text{D と AB との距離} = \text{D}' \text{ と AB との距離} \\ \text{D から AB に下した垂線の足（Q とする）} \\ \qquad = \text{D}' \text{ から AB に下した垂線の足} \end{cases}$$

で決まる点であるから

$$\text{Q}=\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 0\right),\ \text{QD}=\sqrt{\frac{3}{2}}$$

より，$\text{D}'=\left(\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2},\ 0\right)$ となる．このうち，AB に関してCと反対側にある $\text{D}'\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2},\ 0\right)$ をとると，直線 AB 上の点Pのうち CP+PD′ を最小にするPは直線 AB と直線 CD′ の交点である．

$$\begin{cases} \text{AB}: x+y=1 \\ \text{CD}': \sqrt{3}(x-1)-(y-2)=0 \end{cases}$$

を連立することにより，求めるPは

$$\mathbf{P=(2-\sqrt{3},\ \sqrt{3}-1,\ 0)}$$

B.506

3乗，4乗，12乗すると1となる複素数全体の集合をそれぞれ A，B，C とする．

(1)　$\alpha=\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}$，$\omega=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ とするとき

$$\alpha\in C,\ \omega\in A,\ \frac{\alpha}{\omega}\in B \text{ を示せ.}$$

(2)　集合 C の要素はすべて集合 A の要素と集合 B の要素の積で表されることを示せ．

アプローチ　(1)は，α，ω を極形式で表すと簡単に解決します．(2)では，C の12個の要素を1個ずつ調べるのはツライ．$x\in C$ のとき $x^4\in A$，$x^3\in B$ であることに気がつけば，別の道が開けます．

解答　(1)　α，ω を極形式で表すと

$$\alpha=\cos 30^\circ+i\sin 30^\circ,\quad \omega=\cos 120^\circ+i\sin 120^\circ$$

だから，ド・モアブルの定理より

$$\alpha^{12}=\cos(30^\circ\times 12)+i\sin(30^\circ\times 12)=1$$
$$\omega^3=\cos(120^\circ\times 3)+i\sin(120^\circ\times 30)=1$$

さらに

$$\left(\frac{\alpha}{\omega}\right)^4=\{\cos(30^\circ-120^\circ)+i\sin(30^\circ-120^\circ)\}^4$$
$$=\cos(-90^\circ\times 4)+i\sin(-90^\circ\times 4)=1$$

だから，$\alpha\in C$，$\omega\in A$，$\dfrac{\alpha}{\omega}\in B$ である．

(2)　$x\in C$ とするとき，$x^{12}=1$ だから

$$x=x^{12}\cdot x=x^{13}=x^4\cdot x^9 \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

ここで

$$(x^4)^3=x^{12}=1,\quad (x^9)^4=(x^{12})^3=1^3=1$$

だから，①より，$x\in C$ は A の要素 x^4 と B の要素 x^9 の積で表される．

［注］　(2)を一般化すると，$n=p\cdot q$（n，p，q は正の整数，p，q は互いに素）であるとき，1の n 乗根は1の p 乗根と q 乗根の積で表されることがわかる．

B.507

正の整数 n に対して，次の等式を証明せよ．

$$1+\cos\theta+\cos2\theta+\cdots\cdots+\cos n\theta=\frac{\cos\frac{n\theta}{2}\sin\frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

$$\sin\theta+\sin2\theta+\cdots\cdots+\sin n\theta=\frac{\sin\frac{n\theta}{2}\sin\frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

ただし，θ は 360° の整数倍ではないとする．

アプローチ 「複素数の等比数列の和とド・モアブルの定理」がヒントです．

解答　$z=\cos\theta+i\sin\theta$ とおく．

θ は 360° の整数倍でないから，

$$z\neq1 \qquad \cdots\cdots①$$

である．

ド・モアブルの定理から，整数 k に対して

$$z^k=(\cos\theta+i\sin\theta)^k=\cos k\theta+i\sin k\theta \qquad \cdots\cdots②$$

が成り立つ．

ここで，

$$C_n=1+\cos\theta+\cos2\theta+\cdots\cdots+\cos n\theta$$
$$S_n=\sin\theta+\sin2\theta+\cdots\cdots+\sin n\theta$$

とおく．このとき

$$\begin{aligned}&C_n+iS_n\\&=1+(\cos\theta+i\sin\theta)+(\cos2\theta+i\sin2\theta)\\&\qquad+\cdots\cdots+(\cos n\theta+i\sin n\theta)\\&=1+z+z^2+\cdots\cdots+z^n\quad[\because\ ②]\\&=\frac{1-z^{n+1}}{1-z}\\&=\frac{\{1-\cos(n+1)\theta\}-i\sin(n+1)\theta}{(1-\cos\theta)-i\sin\theta}\\&=\frac{2\sin\frac{(n+1)\theta}{2}\left\{\sin\frac{(n+1)\theta}{2}-i\cos\frac{(n+1)\theta}{2}\right\}}{2\sin\frac{\theta}{2}\left(\sin\frac{\theta}{2}-i\cos\frac{\theta}{2}\right)}\end{aligned}$$

等比数列の和の公式は，複素数列でも成り立つ．

$1-\cos\alpha=2\sin^2\frac{\alpha}{2}$
$\sin\alpha=2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$

$$=\frac{\sin\frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\cdot\frac{\left\{\cos\frac{(n+1)\theta}{2}+i\sin\frac{(n+1)\theta}{2}\right\}}{\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2}}$$

◀ 分子，分母を i 倍した

$$=\frac{\sin\frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\left(\cos\frac{n\theta}{2}+i\sin\frac{n\theta}{2}\right)$$

が成り立つ．

C_n，S_n はともに実数であるから，両辺の実数部，虚数部を比較すると，証明すべき2つの等式が得られる．■

［注］　上と同様な計算によって，B.502を処理することもできる．

複素数平面で考え，点 P_k $(k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$ が表す複素数を p_k とおくと，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{P}_{k-1}\mathrm{P}_k}$ $(k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ に対応する複素数 u_k は

$$u_k=p_k-p_{k-1}$$

（ただし，$p_0=0$ とする）となる．

$\overrightarrow{\mathrm{P}_k\mathrm{P}_{k+1}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{P}_{k-1}\mathrm{P}_k}$ を反時計回りに $60°$ 回転し，さらに $\frac{1}{2}$ 倍に縮小したものだから，$\alpha=\frac{1}{2}(\cos 60°+i\sin 60°)$ とおくとき，

$$u_{k+1}=\alpha u_k$$

が成り立ち，さらに

$$u_k=\alpha^{k-1}u_1=\alpha^{k-1}(p_1-p_0)=\alpha^{k-1}$$

となる．さらに，$p_0=0$ だから

$$p_{6n}=\sum_{k=1}^{6n}(p_k-p_{k-1})=\sum_{k=1}^{6n}u_k=\sum_{k=1}^{6n}\alpha^{k-1}=\frac{1-\alpha^{6n}}{1-\alpha}$$

が成り立つ．ここで，ド・モアブルの定理から導かれる

$$\alpha^{6n}=\left\{\frac{1}{2}(\cos 60°+i\sin 60°)\right\}^{6n}=\left(\frac{1}{2}\right)^{6n}=\left(\frac{1}{64}\right)^{n}$$

を代入して p_{6n} を求めると，

$$p_{6n}=\left\{1-\left(\frac{1}{64}\right)^{n}\right\}\left(1+\frac{\sqrt{3}}{3}i\right)$$

となるから，この実数部と虚数部がそれぞれ点 p_{6n} の x 座標，y 座標となる．

B.508

(1)　方程式 $z^4+z^3+z^2+z+1=0$ ………①　の両辺を z^2 で割った式 $z^2+z+1+\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{z^2}=0$ ……②　を利用して，①の解をすべて求めよ．

(2)　①の解が，1の虚数の5乗根であることを利用して $\cos 72°$，$\sin 72°$ を求めよ．

アプローチ　(2)では，1の5乗根の極形式と①の解を比べることになります．

解答　**(1)**　$z=0$ は①の解でないから，①の解は②を満たす z として得られる．②を

$$\left(z+\frac{1}{z}\right)^2+\left(z+\frac{1}{z}\right)-1=0$$

と変形して，解くと，

$z+\dfrac{1}{z}=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$　さらに　$z^2-\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}z+1=0$

となるから，①の解 z は次の4つである．

$$\boldsymbol{\frac{-1+\sqrt{5}\pm\sqrt{10+2\sqrt{5}}\,i}{4},\ \frac{-1-\sqrt{5}\pm\sqrt{10-2\sqrt{5}}\,i}{4}}$$

………(答)

(2)　$z^5-1=(z-1)(z^4+z^3+z^2+z+1)$

であるから，1以外の1の5乗根は①の解である．

A2.6 II ▶　一方，1の5乗根を極形式で表すと

$$z=\cos(72°\times k)+i\sin(72°\times k) \quad\text{………③}$$

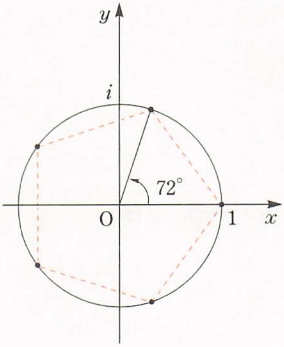
$(k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4)$ である．この中で，特に

$$z=\cos 72°+i\sin 72°$$

は実数部，虚数部がともに正である1の5乗根だから，(1)で求めた解のうち

$$z=\frac{-1+\sqrt{5}+\sqrt{10+2\sqrt{5}}\,i}{4} \quad\text{………④}$$

と一致する．よって，次の関係が成り立つ．

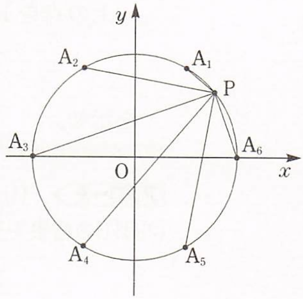


(答)　$\boldsymbol{\cos 72°=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}}$，$\boldsymbol{\sin 72°=\dfrac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}}$

B. 509

半径１の円Cに内接する正六角形 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ がある．
点Pが円Cの周上を動くとき，
$PA_1 \cdot PA_2 \cdot PA_3 \cdot PA_4 \cdot PA_5 \cdot PA_6$ の最大値を求めよ．

アプローチ ここでは，１の６乗根と複素数の絶対値の性質を利用してみましょう．少し難しいかもしれませんが……．



解答 A_1，A_2，……，A_6 が１の６乗根
$\alpha_k=\cos(60°\times k)+i\sin(60°\times k)$　($k=1, 2, \cdots, 6$)
と一致するような複素数平面を考える．

このとき，円Cは中心O，半径１の円 $|z|=1$ となるから，C上の点Pを表す複素数pは

$$p=\cos\theta+i\sin\theta \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

と表される．

$P(p)$ と $A_k(\alpha_k)$ との距離は $|p-\alpha_k|$ であるから

$$I=PA_1 \cdot PA_2 \cdots\cdots PA_6$$
$$=|p-\alpha_1|\cdot|p-\alpha_2|\cdots\cdots|p-\alpha_6| \quad \cdots\cdots ②$$

である．

一方，$z^6-1=0$ の解が α_1，α_2，……，α_6 であるから，因数定理より

◀A2.3II

$$z^6-1=(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\cdots\cdots(z-\alpha_6) \quad \cdots\cdots ③$$

が成り立つ．③で $z=p$ とおき絶対値をとると

$$|p^6-1|=|(p-\alpha_1)(p-\alpha_2)\cdots\cdots(p-\alpha_6)|$$
$$=|p-\alpha_1|\cdot|p-\alpha_2|\cdots\cdots|p-\alpha_6|$$
$$=I$$

◀絶対値の性質 (A2.5II)

となる．よって，①を用いると

$$I=|p^6-1|=|(\cos\theta+i\sin\theta)^6-1|$$
$$=|\cos6\theta-1+i\sin6\theta|$$
$$=\sqrt{(\cos6\theta-1)^2+\sin^2 6\theta}$$
$$=\sqrt{2-2\cos6\theta}$$

◀ド・モアブルの定理

となり，Iは $\cos6\theta=-1$ のとき **最大値２**……(答)
をとる．

◀Pが $\overset{\frown}{A_1A_2}$，$\overset{\frown}{A_2A_3}$，… $\overset{\frown}{A_6A_1}$ の中点のとき成り立つ．

[注]　正六角形に限らず，正n角形であっても，同じ結果になる．

B.510

座標空間内の球面 $S: x^2+y^2+z^2=1$ 上に点 $\mathrm{N}(0,\ 0,\ 1)$ をとる．xy 平面を複素数平面と考え，点 $w=x+iy$ に対して，S 上の点 $\mathrm{P}(X,\ Y,\ Z)$ を次の (＊) によって対応させる．　(＊)　N と w を結ぶ直線と球面 S との，N 以外の交点が P である．

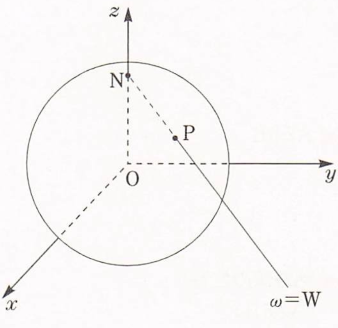
(1) X，Y，Z を x，y を用いて表せ．

(2) $|w_1|=2$, $|w_2|=3$ をみたす複素数 w_1，w_2 に対応する S 上の点を P_1，P_2 とするとき，

$$\mathrm{P_1P_2}=\frac{\sqrt{2}}{5}|w_1-w_2|$$

を示せ．

アプローチ (1)で $\overrightarrow{\mathrm{NP}}$ と N から w へ向うベクトルは同じ向きです．(2)は(1)の結果を利用して計算するだけです．



解答 (1)　点 $w=x+iy$ を空間座標で表したものを $\mathrm{W}(x,\ y,\ 0)$ とする．

$\overrightarrow{\mathrm{NP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{NW}}$ は同じ向きだから

$$\overrightarrow{\mathrm{NP}}=t\overrightarrow{\mathrm{NW}} \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

($t>0$ ……… ②) と表される．

①より

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=t\overrightarrow{\mathrm{OW}}+(1-t)\overrightarrow{\mathrm{ON}}$$

つまり

$$(X,\ Y,\ Z)=(tx,\ ty,\ 1-t) \quad \cdots\cdots\cdots ③$$

である．

P は球面 S 上にあるから，

$$X^2+Y^2+Z^2=1 \quad \cdots\cdots\cdots ④$$

が成り立つ．③の関係を代入して

$$(tx)^2+(ty)^2+(1-t)^2=1,$$

ここで，②に注意すると

$$t=\frac{2}{x^2+y^2+1} \quad \cdots\cdots\cdots ⑤$$

を得る．

③と⑤より，次の関係が成り立つ．

(答) $\boldsymbol{X=\dfrac{2x}{x^2+y^2+1},\ Y=\dfrac{2y}{x^2+y^2+1},\ Z=\dfrac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1}}$

(2)　$w_1=x_1+iy_1$, $w_2=x_2+iy_2$,

$P_1(X_1, Y_1, Z_1)$, $P_2(X_2, Y_2, Z_2)$ とおく．

$|w_1|=2$, $|w_2|=3$ より

$$x_1^2+y_1^2=4,\quad x_2^2+y_2^2=9 \qquad \cdots\cdots\cdots \text{⑥}$$

だから，(1)の結果を用いると

$$X_1=\frac{2x_1}{x_1^2+y_1^2+1}=\frac{2x_1}{5},\ Y_1=\frac{2y_1}{5},\ Z_1=\frac{3}{5}$$

$$X_2=\frac{2x_2}{x_2^2+y_2^2+1}=\frac{x_2}{5},\ Y_2=\frac{y_2}{5},\ Z_2=\frac{4}{5}$$

となる．

よって，

$$\begin{aligned} P_1P_2^2 &= (X_2-X_1)^2+(Y_2-Y_1)^2+(Z_2-Z_1)^2 \\ &= \frac{1}{25}\left\{(2x_1-x_2)^2+(2y_1-y_2)^2+1\right\} \\ &= \frac{2}{25}\{13-2(x_1x_2+y_1y_2)\} \qquad \cdots\cdots\cdots \text{⑦} \end{aligned}$$

◀ ここでも⑥を用いた．

一方

$$\begin{aligned} |w_1-w_2|^2 &= |(x_1-x_2)+(y_1-y_2)i|^2 \\ &= (x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2 \\ &= 13-2(x_1x_2+y_1y_2) \qquad \cdots\cdots\cdots \text{⑧} \end{aligned}$$

◀ ⑥を用いた．

である．

⑦，⑧より

$$P_1P_2^2=\frac{2}{25}|w_1-w_2|^2$$

$$P_1P_2=\frac{\sqrt{2}}{5}|w_1-w_2|$$

が成り立つ．■

[注]　(＊)によって，複素数平面上のすべての点，つまりすべての複素数と S 上のN以外のすべての点がちょうど対応していることになる．この事実の延長上に，大学でリーマン球面 (Riemann sphere) と呼ばれる重要な概念が展開される．

この対応(＊)には，複素数平面上の円および直線を球面 S 上の円にうつすことを含め，興味深い性質が知られている．

B. 511

番号①②③④⑤と書いた札を入れた箱から1枚の札を取り出し，番号を見てから箱にもどすという試行をくり返す．n回目の試行で取り出した札の番号をX_nとする．　条件$Y \geqq X_1$を満たす番号Yの札が出るまで試行を続けるとき，次の確率を求めよ．

(1)　3回目で終わる確率

(2)　$X_1=3$のとき，n回目で終わる条件つき確率

(3)　試行を終えたときの札の番号が5とき，$X_1=3$である条件つき確率

解答　**(1)**　k回目の試行で取り出した札の番号をX_kとする．

3回目で終わるのは

$$X_1 > X_2,\ X_1 \leqq X_3$$

となる場合である．

X_1の値をきめると，
X_2の取り方は1からX_1-1までの(X_1-1)通り，
X_3の取り方はX_1から5までの$(6-X_1)$通りある．
このような

順列X_1，X_2，X_3の起こる確率はどれも$\frac{1}{5^3}$だから，求める確率は

$$\left\{\sum_{X_1=1}^{5}(X_1-1)(6-X_1)\right\}\frac{1}{5^3}=\mathbf{\frac{4}{25}}$$

A「$X_1=3$」
B「n回目で終わる」
とすると，求めるものは
$P_A(B)$

(2)　$X_2<3$，……，$X_{n-1}<3$，$X_n \geqq 3$
となる場合である．

このような順列X_2，……，X_nの起こる確率はそれぞれ$\frac{1}{5^{n-1}}$であり，またそのような順列の個数は，$2^{n-2}\times 3$であるから，求める確率は

$$\frac{1}{5^{n-1}}\times(2^{n-2}\times 3)=\mathbf{\frac{3}{5}\left(\frac{2}{5}\right)^{n-2}}$$

(3) 事象「$X_1=3$」をA，事象「⑤を取り出して試行が終わる」をBで表す．求める確率は

$$P_B(A)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

である．

事象「$X_1=k$ かつn回目で $X_n=5$ で終わる」を$E_{n,k}$で表す．

$E_{n,k}$が起こるのは，

$$X_1=k,\ X_2,\ \cdots\cdots,\ X_{n-1}<k,\ X_n=5$$

となる場合であり，その確率は，

$$P(E_{n,k})=\frac{1}{5^n}\times(k-1)^{n-2}$$

である．

$$B=\bigcup_{n,k}E_{n,k},\quad A\cap B=\bigcup_{n}E_{n,3}$$

であり，事象$E_{n,k}(n\geqq2,\ 1\leqq k\leqq5)$は互いに排反であるから，

$$\begin{aligned}P(A\cap B)&=\sum_{n=2}^{\infty}P(E_{n,3})\\&=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2^{n-2}}{5^n}\\&=\frac{1}{25}\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^m\\&=\frac{1}{15}\end{aligned}$$

◀ $\sum_{n=2}^{\infty}P(E_{n,3})$ は
$P(E_{2,3})+P(E_{3,3})+P(E_{4,3})+P(E_{5,3})+\cdots$
と限りなく足してゆくことを表す．すなわち
$\sum_{n=2}^{N}P(E_{n,3})$
の $N\longrightarrow\infty$ のときの極限である．
(数学IIIで学ぶ概念である)

$$\begin{aligned}P(B)&=\sum_{k=1}^{5}\sum_{n=2}^{\infty}P(E_{n,k})\\&=\sum_{k=1}^{5}\left(\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(k-1)^{n-2}}{5^n}\right)\\&=\sum_{k=1}^{5}\frac{1}{5(6-k)}\\&=\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{4}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+1\right)\\&=\frac{137}{300}\end{aligned}$$

ゆえに

$$P_B(A)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\mathbf{\frac{20}{137}}$$

B.512

ある試験には問題が10題あり，各問に答が5個ずつ用意されていて，生徒はその5個のどれか1つに○をつけて答えるものとする．わからない問題にはでたらめに印をつけるものとして，4問正解の答案を書いた生徒は実際には何題わかっていると考えるべきか．生徒がちょうど i 問わかっているという事象を E_i で表す $(0\leqq i\leqq 10)$ ことにして次の各仮定の下に答えよ．

(1)　$P(E_0)=P(E_1)=\cdots\cdots=P(E_{10})$

(2)　各問がわかる確率は独立に $\dfrac{1}{2}$ である

アプローチ　4問正解という条件の下で i 題わかるという事象の確率，ならびにわかる問題数の期待値を求めます．ベイズの定理 (B.310) を思いおこして下さい．

解答　(1)　4題正解という事象を A とする．

$P_{E_0}(A)$ は1題もわからない生徒がでたらめに印をつけて4題当たる確率だから

当たる問題の選び方が ${}_{10}C_4$ 通り ▶

$$P_{E_0}(A)={}_{10}C_4\left(\frac{1}{5}\right)^4\left(\frac{4}{5}\right)^6=\frac{42}{5^3}\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^6$$

となる．同様にして

わからない問題9題から当たる問3題を選ぶ ▶

$$P_{E_1}(A)={}_9C_3\left(\frac{1}{5}\right)^3\left(\frac{4}{5}\right)^6=\frac{84}{5^3}\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^6$$

$$P_{E_2}(A)={}_8C_2\left(\frac{1}{5}\right)^2\left(\frac{4}{5}\right)^6=\frac{140}{5^3}\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^6$$

$$P_{E_3}(A)={}_7C_1\left(\frac{1}{5}\right)^1\left(\frac{4}{5}\right)^6=\frac{175}{5^3}\left(\frac{4}{5}\right)^6$$

$$P_{E_4}(A)={}_6C_0\left(\frac{1}{5}\right)^0\left(\frac{4}{5}\right)^6=\frac{125}{5^3}\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^6$$

また，$5\leqq i\leqq 10$ なる i に対しては

5問以上正解するはずだから ▶

$$P_{E_i}(A)=0$$

となる．さて

ベイズの定理 (B.310) ▶

$$P_A(E_i)=\frac{P(E_i)\,P_{E_i}(A)}{\sum_{i=0}^{10}P(E_i)\,P_{E_i}(A)}$$

$$=\frac{P(E_i)P_{E_i}(A)}{\sum_{i=0}^{4}P(E_i)P_{E_i}(A)}\ \cdots\cdots\cdots☆$$

である．(1)の仮定の下では

$$P_A(E_0)=\frac{42}{566},\quad P_A(E_1)=\frac{84}{566},$$

$$P_A(E_2)=\frac{140}{566},\quad P_A(E_3)=\frac{175}{566},$$

$$P_A(E_4)=\frac{125}{566},\quad P_A(E_i)=0\quad(5\leqq i\leqq 10)$$

より，求めるべき期待値 $\sum_{i=0}^{10}P_A(E_i)\cdot i$ は

$$\frac{1389}{566}=\mathbf{2.454}\cdots\cdots$$

となる．すなわち，約 2.5 題わかっていると考えられる．

(2) の仮定の下では

$$P(E_i)={}_{10}\mathrm{C}_i\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\quad(0\leqq i\leqq 10)$$

であるから，☆より

$$P_A(E_0)=\frac{42}{56432},\quad P_A(E_1)=\frac{840}{56432}$$

$$P_A(E_2)=\frac{6300}{56432},\quad P_A(E_3)=\frac{21000}{56432}$$

$$P_A(E_4)=\frac{26250}{56432},\quad P_A(E_i)=0\quad(5\leqq i\leqq 10)$$

となり，求める期待値 $\sum_{i=0}^{10}P_A(E_i)\cdot i$ は

$$\frac{181440}{56432}=\mathbf{3.215}\cdots\cdots$$

となる．すなわち，約 3.2 題わかっていると考えられる．

B.513

コインを投げて表が出れば右へ +1 進み裏が出れば左へ +1 進むとして，コイン投げの試行回数 n を x 軸に，その時の位置 s_n を y 軸に取って，その進行状況をグラフにしたものを道と呼ぶことにする．

(1)　(0, 0) から (30, 20) に至る道の総数を求めよ．

(2)　(0, 0) から (30, 20) に至る道 (0, 0), (1, s_1), ……, (29, s_{29}), (30, 20) が，途中では常に x 軸より上側，すなわち，s_1, s_2, …, $s_{29}>0$ となっている確率を求めよ．

アプローチ　ランダム・ウォーク (乱歩，酔歩) の問題と呼ばれるものです．(2)では余事象に注目します．

解答　**(1)**　表が p 回，裏が q 回出たとすれば，(0, 0) から出発して $(p+q,\ p-q)$ に至り，またそのような道の総数は ${}_{p+q}\mathrm{C}_p$ である．

▶ 表を何回目で出すか，その選び方の総数

よって，(0, 0) から $(n,\ m)$ に至るのは，n 回のうち表が $\dfrac{n+m}{2}$ 回出る場合であり，そのような道の総数 $N_{n,m}$ は

▶ $\left.\begin{array}{l}p+q=n\\ p-q=m\end{array}\right\}$

$$N_{n,m}={}_n\mathrm{C}_{\frac{n+m}{2}}$$

である．よって，本問で求める総数は

$$N_{30,20}={}_{30}\mathrm{C}_{25}$$

となる．

(2)　(0, 0) から $(n,\ m)$ (ただし $m>0$) へ至る道 $s_0=0$, s_1, ……, $s_n=m$ のうちで，s_1, s_2, ……, $s_n>0$ となっているものの数を求めることにする．

まず，$s_1=1$ でなければならないから，(1, 1) から $(n,\ m)$ へ至る道になっていなければならない．そのような道のうち，x 軸と共通点を持つものは，(1, 1) から進んで最初の共通点までの道を，x 軸に関して対称に反転すれば，(1, −1) から $(n,\ m)$ に至る道を与える．逆に，(1, −1) から $(n,\ m)$ に至る道は逆の操作によって，(1, 1) から $(n,\ m)$ に至る道であって x 軸と共通点を持つものを与える．

▶ 図を描いてみて下さい．

▶ $m>0$ だから途中で x 軸と交わる．

すなわち

$$\left\{\begin{array}{l}(1,\ 1)\text{から}(n,\ m)\text{へ至る道}\\ \text{で}x\text{軸と共有点をもつもの}\end{array}\right\} \overset{1\text{対}1}{\longleftrightarrow} \left\{(1,\ -1)\text{から}(n,\ m)\text{へ至る道}\right\}$$

◀鏡像の原理と呼ばれる．

となっている．

一方，(1, 1) から $(n,\ m)$ に至る道は，グラフを左と下にそれぞれ1ずつ平行移動すると，(0, 0) から $(n-1,\ m-1)$ に至る道になるから，その総数は(1)での考察より $N_{n-1,m-1}$ である．

◀図を描いてみて下さい．

同様に　(1, −1) から $(n,\ m)$ に至る道は，(0, 0) から $(n-1,\ m+1)$ に至る道と同一視することより，その総数は　$N_{n-1,m+1}$ である．

以上より，(1, 1) から $(n,\ m)$ に至る道であって x 軸と共通点を持たないものの総数は

◀"(1, 1)"の代りに"(0, 0)"と言っても同じことになる．

$$N_{n-1,m-1}-N_{m-1,n+1}$$
$$={}_{n-1}\mathrm{C}_{\frac{n+m-2}{2}}-{}_{n-1}\mathrm{C}_{\frac{n+m}{2}}$$

ここで(1)同様　$n=p+q$，$m=p-q$ なる p，q を用いて計算を進めると

$$={}_{p+q-1}\mathrm{C}_{p-1}-{}_{p+q-1}\mathrm{C}_{p}$$
$$=\frac{(p+q-1)!}{(p-1)!\,q!}-\frac{(p+q-1)!}{p!(q-1)!}$$
$$=\frac{p-q}{p+q}\cdot\frac{(p+q)!}{p!\,q!}$$
$$=\frac{m}{n}N_{m,n}$$

◀$\dfrac{(p+q)!}{p!\,q!}={}_{p+q}\mathrm{C}_p=N_{m,n}$ ((1)の解答参照)

となる．よって，(0, 0) から $(n,\ m)$ に至る道が途中で x 軸と共通点を持たない確率は $\dfrac{m}{n}$ となる．とくに，$n=30$，$m=20$ のとき，その確率は

$$\mathbf{\frac{2}{3}}$$

研究　(0, 0) から $(2n,\ 0)$ へ至る道のうち　(1)　s_1，s_2，……，$s_{2n-1}>0$ となるもの　(2)　s_1，s_2，……，$s_{2n-1}\geqq 0$ となるもの　の総数をそれぞれ求めてみよ．

$$\left((1)\ \ \frac{1}{n}\cdot{}_{2n-2}\mathrm{C}_{n-1}\qquad (2)\ \ \frac{1}{n+1}\cdot{}_{2n}\mathrm{C}_{n}\qquad \text{となる}\right)$$

B.514

チェビシェフの定理(B.324)を用いて，次の定理を示せ：

1回の試行で事象Aの起こる確率がpである場合，

この試行を独立にn回くり返すとき事象Aの起こる回数をX_nとすれば

任意の正数εに対して $\displaystyle\lim_{n\to\infty}P\left(\left|\frac{X_n}{n}-p\right|<\varepsilon\right)=1$

が成立する．(大数の法則)

アプローチ 本問では数列の極限が登場している．数学IIIで学ぶ概念であるが，何とかのみこんでもらえるであろう．数学IIIの該当部分を学んだ後に立ちもどってもよいだろう．

解答 Aの起こる回数X_nは2項分布$B(n,\ p)$に従うから，その平均m，標準偏差σは

$$m=np,\quad \sigma=\sqrt{npq}\quad (q=1-p)$$

で与えられる．

ここでチェビシェフの定理を用いると，任意の正数λに対し

$$P(|X_n-np|<\lambda\sqrt{npq})\geqq 1-\frac{1}{\lambda^2}$$

であり，左辺を書きかえると

$|X_n-np|<\lambda\sqrt{npq} \iff \left|\dfrac{X_n}{n}-p\right|<\lambda\sqrt{\dfrac{pq}{n}}$

$$P\left(\left|\frac{X_n}{n}-p\right|<\lambda\sqrt{\frac{pq}{n}}\right)\geqq 1-\frac{1}{\lambda^2}$$

となる．いま，任意に与えられた正数εに対し，上のλを

$$\lambda\sqrt{\frac{pq}{n}}=\varepsilon\quad すなわち\quad \lambda=\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}$$

ととれば

$$(1\geqq)P\left(\left|\frac{X_n}{n}-p\right|<\varepsilon\right)\geqq 1-\frac{pq}{\varepsilon^2 n}\quad\cdots\cdots\cdots\quad (*)$$

p，q，εはnによらない数なので$n\to\infty$のとき(＊)の右辺は1に収束する．よって，左辺も1に収束する．■

数学III「はさみ打ちの定理」

C. 探究篇

本篇では，数学Bに登場する数学的概念のうち，

　教科書や中級の参考書では，さりげなく通り過ぎている（あるいは，無自覚に飛ばしている）もの

や

　「指導要領」の制約のために，本来の自然な発展的記述を中断されているもの

を，意欲の高い読者のために，項目別にまとめたものである．

ところによっては，理解に困難を感ずることもあるだろうが，あまり神経質にならずに，何回も繰り返して読んでもらいたい．自分の興味のある項目を，ひろい読みするだけでも，もちろん良い．

なお，読者の利便を考慮して，本シリーズ「大学への数学ニューアプローチ」(数学Ⅰ，数学A)の項目を，一部重ねて収録した．

C.1 ベクトルの線型独立性

I．A1.3 Vで説明したように，平面ベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ が $\vec{0}$ でなくかつ互いに平行でないとき，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は **線型独立** または **1次独立** であるという．式を使って正確に表すなら，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ が線型独立とは

$$\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}=\vec{0} \iff \alpha=\beta=0 \qquad \cdots\cdots(1)$$

が成立することである．

例　1°　$\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$，$\vec{b}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ とすると，

$$\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}=\vec{0} \iff \begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}=\vec{0} \iff \alpha=\beta=0$$

であるから，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は線型独立である．

2°　$\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$，$\vec{b}=\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$ とすると，

$$\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}=\vec{0} \iff \begin{pmatrix}\alpha+2\beta\\0\end{pmatrix}=\vec{0} \iff \alpha+2\beta=0$$

であるから，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は線型独立でない（線型従属という）．

II．空間ベクトルのときは，(1)のかわりに

$$\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}=\vec{0} \iff \alpha=\beta-\gamma=0 \qquad \cdots\cdots\cdots(2)$$

となる．図形のことばで直観的にいい表すなら，3つのベクトルが線型独立であるとは，同一平面上にない，ということである．

III．一般に n 個のベクトル $\vec{a_1}$，$\vec{a_2}$，……，$\vec{a_n}$ について

$$\alpha_1\vec{a_1}+\alpha_2\vec{a_2}+\cdots\cdots+\alpha_n\vec{a_n}=\vec{0} \iff \alpha_1=\alpha_2=\cdots\cdots=\alpha_n=0$$

が成り立つとき，これらは線型独立であるという．線型独立なベクトルは平面では2つまで，空間では3つまでしかとることができない．

4次元以上の「高次元空間」は，線型独立なベクトルが4本以上とれる世界にほかならない．

C.2 成分表示のより深い意味

高校数学の標準的な記述に従った，ベクトルの成分表示の意味については，A1.4，A1.7 で述べた．ここでは，指導要領を超えた立場から，成分表示の意味を解説する．

平面上に線型独立なベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ が与えられると，任意のベクトル $\vec{v}$ が，適当な実数 x，y を用いて

$$\vec{v}=x\vec{a}+y\vec{b} \qquad \cdots\cdots\cdots(*)$$

と表すことができ，しかも，このような x，y の組は，ただ1つしかない．

逆に，実数 x，y が与えられると，これに対し $(*)$ を満たすベクトル $\vec{v}$ がただ1つ決まる．

したがって，ベクトル $\vec{v}$ と実数の組 $(x,\ y)$ の間に，1対1対応ができる．この $(x,\ y)$ を，ベクトル $\vec{v}$ の成分表示と呼ぶのである．この対応は，線型独立なベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ が与えられたときに決まるものなので，詳しくは“$\vec{a}$，$\vec{b}$ を基底とする，$\vec{v}$ の成分表示”という．高校数学で一般的な成分表示は，この基底が，座標軸と同じ向きの，いわゆる基本ベクトルの場合ということができる．

さて，xy 平面でたとえば

O(0, 0)，A(3, 1)，B(1, 2)，C(7, 4) とし，

$$\overrightarrow{OA}=\vec{a},\ \overrightarrow{OB}=\vec{b},\ \overrightarrow{OC}=\vec{c}$$

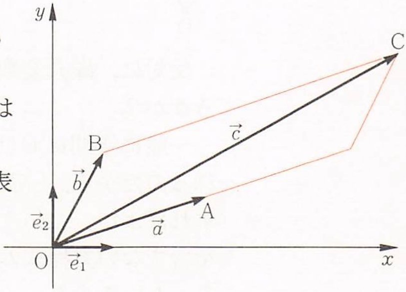
とおくと，$\vec{c}$ の成分表示は，高校の流儀では

$$\vec{c}=(7,\ 4)$$

となるが，もし，$\vec{a}$，$\vec{b}$ を基底とする成分表示を考えるなら

$$\vec{c}=(2,\ 1)$$

となる．($\vec{c}=2\vec{a}+\vec{b}$ だからである！)



一般に，高校の意味で $\vec{v}=(x,\ y)$ と表示されるベクトルが，$\vec{a}$，$\vec{b}$ を基底として $(X,\ Y)$ と表示されるとすると

$$\vec{v}=X\vec{a}+Y\vec{b}=X(3,\ 1)+Y(1,\ 2)=(3X+Y,\ X+2Y)$$

$$\therefore\ \begin{cases} x=3X+Y \\ y=X+2Y \end{cases}$$

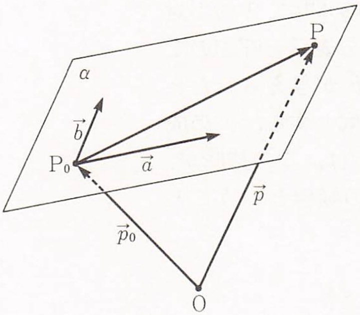
となる．つまり，$\vec{a}$，$\vec{b}$ を基底とする成分表示と $\vec{e}_1$，$\vec{e}_2$ を基底とする成分表示はこのような単純な変換で結ばれる．

C.3 ベクトル方程式

直線のベクトル方程式 …… $\vec{p}=\vec{p}_0+t\vec{u}$
平面のベクトル方程式 …… $\vec{n}\cdot(\vec{p}-\vec{p}_0)=0$

という基本事項をすでに学んでいるが，同じく「ベクトル方程式」と呼ばれながら直線の場合にだけ，任意の実数値をとって変化する媒介変数（パラメタ）t が含まれていることを，不審に思う読者はいないだろうか？

実は，平面のベクトル方程式でも，媒介変数を含む形はある．実際，平面 α 上に1点 $P_0(\vec{p}_0)$ と，α に平行でしかも互いに平行でないベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ をとると，



点Pが平面 α 上にある
$\iff$ $\overrightarrow{P_0P}$ が $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の線型結合で表せる
という関係から，

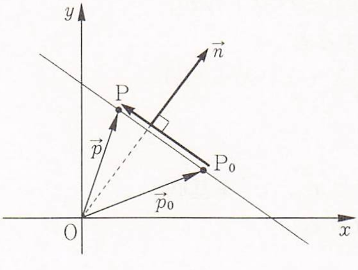
$$\vec{p}-\vec{p}_0=t\vec{a}+u\vec{b}$$
$$\therefore\quad \vec{p}=\vec{p}_0+t\vec{a}+u\vec{b}$$

を得る．ここで，t，u を，互いに独立にすべての実数値をとって変化する媒介変数と考えれば，これは，平面 α のベクトル方程式である．

反対に，媒介変数を含まない直線のベクトル方程式はないだろうか？

一般に空間における直線は，交わる2平面の交線として表されるのだから．「初めにあげたタイプの平面の方程式を2つ連立すればよい」というのがひとつの答だが，「そもそも，媒介変数を含まない方程式の方が，不自然なのである」ということもできる．というのも，

$$\vec{n}\cdot(\vec{p}-\vec{p}_0)=0$$



が，“$\vec{n}$ を法線ベクトルとする平面”を表す，といえるのは，考えているベクトルの全体が空間であるからにすぎず，もし，平面ベクトルの世界でこの方程式を考えるなら，“$\vec{n}$ を法線ベクトルとする直線”を表していることになるからである．

C.4 外積

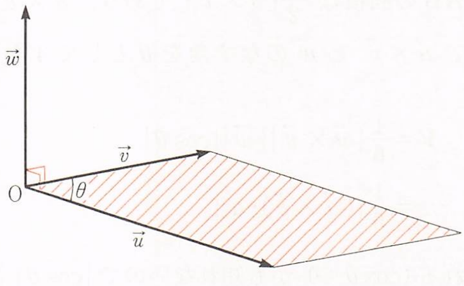
3点 O(0, 0), A(x, y), B(x', y') の作る3角形の面積が $\frac{1}{2}|xy'-x'y|$ で与えられ，絶対値の中味 $xy'-x'y$ が行列 $\begin{pmatrix} x & x' \\ y & y' \end{pmatrix}$ の行列式に等しいことは有名である．それでは座標空間の4点が作る4面体の体積はどう表されるだろうか．これを考えるにはベクトルの外積という概念が有効である．

空間ベクトル $\vec{u}$, $\vec{v}$ に対し次の3つの性質をもつベクトル $\vec{w}$ を $\vec{u}$ と $\vec{v}$ の外積と呼び $\vec{w}=\vec{u}\times\vec{v}$ と書く．

1°　$\vec{w}$ は $\vec{u}$ と $\vec{v}$ に直交する．

2°　$|\vec{w}|$ は $\vec{u}$, $\vec{v}$ を2辺とする平行四辺形の面積 $|\vec{u}||\vec{v}|\sin\theta$ に等しい．ただし θ は $\vec{u}$ と $\vec{v}$ のなす角である．

3°　$\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ は右手系をなす．すなわち右手の親指，人さし指，中指を $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ の向きにそれぞれ合わせることができる．



このとき次が成立する（証明は単純な計算だけでできるので省略する）．

$$\vec{v}\times\vec{u}=-\vec{u}\times\vec{v}$$
$$\vec{u}\times(\vec{v}_1+\vec{v}_2)=\vec{u}\times\vec{v}_1+\vec{u}\times\vec{v}_2$$
$$\vec{u}\times(a\vec{v})=a(\vec{u}\times\vec{v})$$
$$\vec{e}_1\times\vec{e}_2=\vec{e}_3,\ \text{ただし}\ \vec{e}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\ \vec{e}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\ \vec{e}_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$
$$\vec{e}_2\times\vec{e}_3=\vec{e}_1,$$
$$\vec{e}_3\times\vec{e}_1=\vec{e}_2,$$

これらの公式を用いると

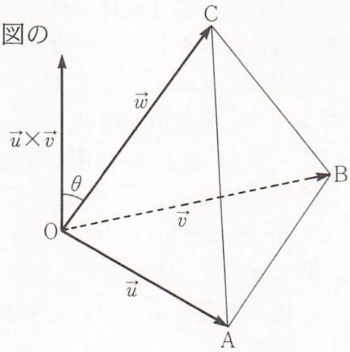
$$(x\vec{e}_1+y\vec{e}_2+z\vec{e}_3)\times(x'\vec{e}_1+y'\vec{e}_2+z'\vec{e}_3)$$
$$=(yz'-y'z)\vec{e}_1+(zx'-z'x)\vec{e}_2+(xy'-x'y)\vec{e}_3$$

を得る．すなわち

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} yz'-y'z \\ zx'-z'x \\ xy'-x'y \end{pmatrix}$$

が成立する．

さて $\vec{u}$，$\vec{v}$，$\vec{w}$ を 3 辺とする図のような 4 面体 OABC を考える．



底面 OAB の面積は $\frac{1}{2}|\vec{u}\times\vec{v}|$ であり，$\vec{u}\times\vec{v}$ は底面に垂直だから，$\vec{u}\times\vec{v}$ と $\vec{w}$ のなす角を θ として 4 面体 OABC の体積 V は

$$V=\frac{1}{6}|\vec{u}\times\vec{v}||\vec{w}||\cos\theta|$$
$$=\frac{1}{6}|(\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{w}|$$

と表される ($\cos\theta<0$ かも知れないので $|\cos\theta|$ とした)．実は

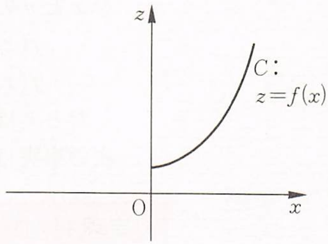
3 次正方行列 $\begin{pmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{pmatrix}$ に対し

$$\vec{u}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},\quad \vec{v}=\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix},\quad \vec{w}=\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix}$$

で定まる，$(\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{w}$ をこの行列の行列式と定義するのである．すると冒頭に述べた 3 角形の面積と 2 次正方行列の行列式との関係が 3 次元に拡張されることになる．これをさらに高次元化するのは大学で学ぶ線型代数に譲らねばならない．

C.5 回転曲面

高校の数学Bで扱われる曲面は正式には，平面と球面だけであるが，それ以外でも簡単なものは考えることができる．最も典型的なのは曲線をある直線のまわりに回転してできる回転曲面である．ここではその方程式を作ってみよう．



xyz 空間において，zx 平面上に，曲線

$$C : z=f(x),\qquad x\geqq 0$$

が与えられたとき，C を z 軸のまわりに回転してできる曲面 S を考える．

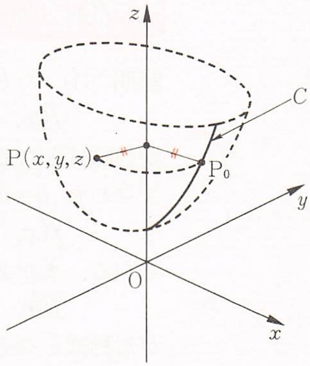
空間内の点 $\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$ が，曲面 S' 上にあるためには，P と同じ高さにあり，z 軸からの距離が等しい点 P_0 を xz 平面上，$x>0$ の部分にとると，P_0 が曲面 C 上にあることが必要十分である．P_0 の座標は

$$(\sqrt{x^2+y^2},\ 0,\ z)$$

であるので，この条件は

$$z=f(\sqrt{x^2+y^2}) \qquad \cdots\cdots(*)$$

となる．したがって$(*)$が S の方程式である．

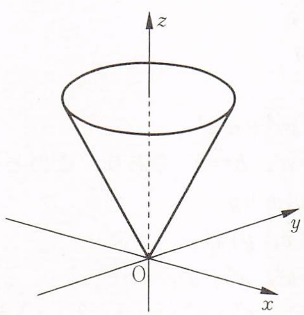


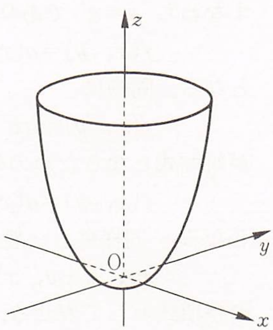
例1　xz 平面上，半直線 $z=x$ $(x\geqq 0)$ を回転してできる円すい面の方程式は，

$$z=\sqrt{x^2+y^2}$$

例2　xz 平面上，放物線 $z=x^2$ を回転してできる曲面の方程式は，

$$z=x^2+y^2$$





C.6 対称式と交代式

1　$f(x,\ y)$ を x と y の多項式とする．x と y を入れ換えても式の形が変わらないとき，すなわち，$f(x,\ y)$ と $f(y,\ x)$ が同じ多項式であるとき，$f(x,\ y)$ を x と y の **対称式** という．また，$f(y,\ x)$ が $-f(x,\ y)$ と一致するとき，$f(x,\ y)$ を x と y の **交代式** という．

$f(x,\ y)$ は対称式 $\iff$ $f(y,\ x)=f(x,\ y)$

$f(x,\ y)$ は交代式 $\iff$ $f(y,\ x)=-f(x,\ y)$

たとえば，$x+y$，xy は対称式，x^2-y^2 は交代式である．次の事実は，経験的に知っているだろう．

[定理 1] (1) 対称式 $f(x,\ y)$ は，$x+y$ と xy の多項式として表せる．

(2) 交代式 $f(x,\ y)$ は，ある対称式 $g(x,\ y)$ を用いて，$f(x,\ y)=(x-y)\cdot g(x,\ y)$ と表せる．

証明：(1) たとえば 1 次式

$$f(x,\ y)=ax+a'y$$

が対称式となるための条件は $ax+a'y=ay+a'x$

すなわち $a=a'$ であり，このとき

$$f(x,\ y)=a(x+y)$$

となる．また 2 次式

$$f(x,\ y)=ax^2+bxy+a'y^2$$

が対称式となるための条件は，

$$ax^2+bxy+a'y^2=ay^2+byx+a'x^2$$

すなわち $a=a'$ であり，このとき，

$$f(x,\ y)=a(x^2+y^2)+bxy$$

となる．同様に

$$f(x,\ y)=ax^3+bx^2y+b'xy^2+a'y^3$$

が対称式となるための条件は，$a=a'$，$b=b'$ であり，このとき

$$f(x,\ y)=a(x^3+y^3)+bxy(x+y)$$

となる．同様に，一般に対称式 $f(x,\ y)$ は

$$xy,\ x+y,\ x^2+y^2,\ x^3+y^3,\ x^4+y^4,\ \cdots\cdots$$

の多項式として表せる．そこで次に，$x^n+y^n\ (n=1,\ 2,\ \cdots)$ を

$x+y$ と xy で表すことを考えよう．ところが

$$x^n+y^n=(x+y)(x^{n-1}+y^{n-1})-xy(x^{n-2}+y^{n-2})$$

であるから，x^n+y^n を $x+y$ と xy で表すには，$x^{n-1}+y^{n-1}$ と $x^{n-2}+y^{n-2}$ を $x+y$ と xy で表しておけばよい．この作業をくり返せば次数が次第に下がり，結局 x^2+y^2 と $x+y$ を $x+y$ と xy で表すという自明の問題に帰する．

以上により(1)が証明された．

(2) $f(x,\ y)=-f(y,\ x)$ に $y=x$ を代入すると

$$f(x,\ x)=-f(x,\ x) \qquad \therefore\ f(x,\ x)=0$$

となる．したがって，因数定理により，

$$f(x,\ y)=(x-y)\,g(x,\ y)$$

のように因数分解できる．このとき $g(x,\ y)$ が対称式の定義を満たすことは明らかである．これで(2)が示された．■

ここで $a=x+y$，$b=xy$ とおくと，a，b は x，y を２根とする２次方程式 $t^2-at+b=0$ の係数となる．また $(x-y)^2$ を a と b で表したもの a^2-4b が，２次方程式の **判別式** であった．

2 x，y，z の対称式・交代式も同様に定義される．すなわち，x，y，z の多項式 $f(x,\ y,\ z)$ において，どの２つの変数を入れ換えても式の形が変わらないとき対称式といい，符号が変わるときに交代式という．また定理１に対応して

[定理 2] (1) 対称式 $f(x,\ y,\ z)$ は，$x+y+z$，$xy+yz+zx$，xyz の多項式として表せる．

(2) 交代式 $f(x,\ y,\ z)$ は，ある対称式 $g(x,\ y,\ z)$ を用いて，$f(x,\ y,\ z)=(x-y)(y-z)(z-x)g(x,\ y,\ z)$ と表せる．

が成立する．ここで $a=x+y+z$，$b=xy+yz+zx$，$c=xyz$ は x，y，z を３根とする３次方程式の係数となる．なお，$(x-y)^2(y-z)^2(z-x)^2$（これは，x，y，z の対称式）を a，b，c で表したものを，３次方程式の判別式という．

C.7　3角不等式

x，y を実数とするとき，不等式

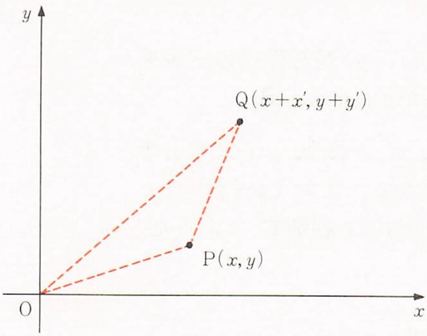
$$|x+y| \leqq |x|+|y| \qquad \cdots\cdots①$$

は，その両辺を2乗した式

$$(x+y)^2 \leqq (|x|+|y|)^2 \qquad \therefore \quad xy \leqq |xy|$$

と同値であるから，任意の実数に対して成立する「絶対不等式」である．

このように①の証明は易しいが，その命名の由来や「意味」は複素数の範囲で理解する方がよい．



複素数 $z=x+iy$ に対し，

$$|z|=\sqrt{x^2+y^2}$$

と定める．これは，原点と点 (x, y) の間の距離であるから，左図のように点P，Qをとり，

$z'=x'+iy'$ とおけば，

$$|z|=\overline{\mathrm{OP}},\ |z'|=\overline{\mathrm{PQ}}$$

$$|z+z'|=\overline{\mathrm{OQ}}$$

となる．

したがって，よく知られた関係

$$\overline{\mathrm{OQ}} \leqq \overline{\mathrm{OP}}+\overline{\mathrm{PQ}}$$

から，

$$|z+z'| \leqq |z|+|z'| \qquad \cdots\cdots②$$

を得る．

符号は，3点O，P，Qがこの順で一直線上に並ぶときに成立する．①は②の特別な場合であり，これらを「3角不等式」という．

また，複素数の絶対値は，次の性質をもつ．

$$|zz'|=|z||z'|$$
$$|z|^2=|\bar{z}|^2=z\bar{z}$$

C.8　3次方程式の解の公式

(カルダーノの解法)

3次方程式

$$ax^3+bx^2+cx+d=0 \cdots\cdots (*)$$

において，$x=X+\alpha$ と置換すると，

$$a(X+\alpha)^3+b(X+\alpha)^2+c(X+\alpha)+d=0$$

$$\therefore \quad aX^3+(3a\alpha+a)X^2+(3a\alpha^2+2b\alpha+c)X +(a\alpha^3+b\alpha^2+c\alpha+d)=0$$

となる，そこで，α を

$$3a\alpha+b=0 \quad \text{すなわち} \quad \alpha=-\frac{b}{3a}$$

と定めると，X についての3次方程式において，X^2 の係数が0となる．

さらに，両辺を a で割れば，X についての方程式は

$$X^3+pX+q=0 \qquad \cdots\cdots (**)$$

(p，q は，初めに与えられた a，b，c，d で定まる定数)

という形になる．天下り的だが，ここで

$$X=u+v \qquad \cdots\cdots ①$$

とおくと，

$$(u+v)^3+p(u+v)+q=0$$

$$\therefore \quad u^3+v^3+q+(u+v)(3uv+p)=0 \qquad \cdots\cdots ②$$

となる．したがって

$$\begin{cases} uv=-\dfrac{p}{3} & \cdots\cdots ③ \\ u^3+v^3=-q & \cdots\cdots ④ \end{cases}$$

と満たす u，v を見出せば，①によってXが求められる．

さて，③より

$$u^3v^3=-\left(\frac{p}{3}\right)^3 \qquad \cdots\cdots ③'$$

であるので，③′と④より u^3，v^3 は，t についての方程式

$$t^2+qt-\left(\frac{p}{3}\right)^3=0$$

の2解である．

$$(u^3,\ v^3)=\left(-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3},\ -\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}\right)$$

としても一般性を失なわない．そして p，q が，

$$\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3 \geqq 0 \qquad \cdots\cdots (☆)$$

を満たす実数であるときは，

$$-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3},\quad -\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}$$

の実数の立方根を α，β とおくと，u，v の値が

$$\begin{cases} u=\alpha,\ \alpha\omega,\ \alpha\omega^2 \\ v=\beta,\ \beta\omega,\ \beta\omega^2 \end{cases} \quad (\omega \text{ は } 1 \text{ の虚数立方根})$$

と求められるが，これから導かれる 9 組の $(u,\ v)$ のうち，②を満たすものは，

$$(u,\ v)=(\alpha,\ \beta),\ (\alpha\omega,\ \beta\omega^2),\ (\alpha\omega^2,\ \beta\omega)$$

の 3 組に限る．このようにして，3 次方程式 (＊＊) の 3 解

$$X=\alpha+\beta,\ \alpha\omega+\beta\omega^2,\ \alpha\omega^2+\beta\omega$$

が得られる．たとえば，3 次方程式

$$X^3+6X+2=0$$

の解は

$$X=\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{4},\ \sqrt[3]{2}\,\omega-\sqrt[3]{4}\,\omega^2,\ \sqrt[3]{2}\,\omega^2-\sqrt[3]{4}\,\omega$$

である．

以上は，タルターリャ (N. Tartaglia, 1499？—1557) によって発見され，カルダーノ (G. Cardano，1501—1576) によって公開された 3 次方程式の解法である．

読者は，②から，③，④を導く部分に，「単なる十分条件の変形ではないか？」という疑問をもつかもしれないが，任意の複素数 X を，2 数の和の形 (①) で表現する際，その 2 数の積に③という条件をつけることができるので，初めから③が仮定されていると考えて，②から④を導けばよい．

なお，$(u,\ v)$ について 6 組の不適解が生じたのは，③から③′への変形が同値変形でないためである．

極めて興味深いことに，ここで述べた解法は，条件 (☆) が満たされない場合，たとえば，$x^3=15x+4$ に対しては，逆説的な結果に導く．(因数分解による解法と比較してみよ．) しかし，この逆説の発見が，虚数の〈実在性〉の認知の大きな契機となったのである．

C.9 複素係数の方程式

(代数学の基本定理)

高校の範囲では，少数の例外(☞ B.214)を除いて，方程式の係数は，実数の範囲に限定されている．しかし，たとえ係数がすべて実数であっても，解が実数の範囲に存在せず，複素数の世界にいって初めて見つけられる，という例は，すでに2次方程式において経験しているであろう．(たとえば，$x^2+x+1=0$)

では，係数の範囲を複素数にまで一般化して，2次方程式

$$ax^2+bx+c=0$$

を考えたら，複素数の集合より，もっと広い数の集合の中にその解が見出される，という可能性はないのだろうか？　たとえば，方程式 $x^2+2ix+1=0$ の解は，どうなるであろうか？

話が，このように具体的に与えられれば，解決は難しくない．実際，上の方程式は，

$$(x+i)^2=-2$$

と変形されることから，複素数の範囲に

$$x=(-1\pm\sqrt{2})i$$

という解が，見出される．

一般に，任意の複素数 $\alpha\neq 0$ に対し，$z^2=\alpha$ を満足する複素数が2個存在する．これらを形式的に $\pm\sqrt{\alpha}$ と表すという約束をすれば，2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解の公式

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

は，a，b，c が複素数の場合も成り立つといえる．

このようにして，2次方程式を通して複素数以上に一般的な数が現れる可能性は，否定される．実は，方程式の次数をいくらあげていても，事態は変わらない．つまり，n 次方程式は複素係数であっても複素数の範囲に n 個の解をもつ．これは，19世紀の初め，ガウスによって初めて厳密に証明された．今日，「**代数学の基本定理**」と呼ばれている．

索　　引

各項目の事項を記載してある箇所を示すのに，

A篇(基礎理論)に関しては，小節の番号と共に(　)内にページも記しておいた．

B篇(演習問題)，C篇(探究)に関しては，当該番号のみを示してある．

あ

か

や

ら

わ

著者の先生方の横顔

藤田　宏（ふじた　ひろし）

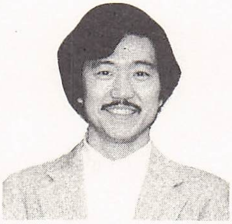
東海大学教授，東京大学理学部名誉教授



学生時代にすでに数学教育の重要性を認識，本書の前身「東大への数学」を執筆，研究教育・学術行政の要職の合間をぬって，数学教育国際委員会日本代表，文部省教育課程審議会委員，数学オリンピック財団理事長なども歴任され，数学教育に関し国際的・国内的に活躍していらっしゃいます．

長岡亮介（ながおかりょうすけ）

放送大学教授



「東大に入って最も良かったことの１つは藤田宏先生にめぐりあえたこと」ということで,「大学への数学」との出会いも，藤田ゼミ時代．技術的数学に飽きたらず，その意味を求めて「数学史と数学教育にさまよい込んだ」ということで，今では「趣味は数学教育」だそうです．

東大や早大でも講義をなさっているので，先輩たちには，先生に習った人もいるかもしれませんよ！

長崎憲一（ながさきけんいち）

千葉工業大学工学部教授



明快な関数解析の講義に引かれて藤田ゼミを選び，初めて非線形微分方程式論と出会って以来，現在までその研究を続けていらっしゃいます．

先生の目標は，研究面だけでなく，大学において数学をわかりやすく教えるという点でも，藤田先生に近づくこととのことです．そのためにも，高校数学の実状を再確認できた本書のための仕事は非常に有益だったそうです．

◇◇◇研文書院◇◇◇

大学への数学Bニューアプローチ

著　者　藤田　宏　長岡亮介
　　　　長崎憲一

発行者　飯塚　潤

発行所　株式会社 研文書院

〒166-0015 東京都杉並区成田東 3-6-3
TEL　03(3312)9033
FAX　03(3312)8541
振替口座　00130-0-56451

印刷　大成舎　製本　東京美術紙工

ISBN 4-7680-1060-1

ISBN4-7680-1060-1

C7341 ¥1845E

9784768010600

定価 本体 1845円+税

1927341018459